Dr. Jens Maßberg
Dr. Chistian Löwenstein

Institut für Optimierung und Operations Research
Sommersemester 2013

Optimierung / OR I

Übungsblatt 9

Aufgabe 1: Das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem sei gegeben:

$$\begin{array}{ll} \max & 10x_1 + 13x_2 \\ & 10x_1 + 14x_2 \leq 43 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

1. Lösen Sie das relaxierte lineare Optimierungsproblem mit dem Simplex-Verfahren und schreiben Sie das optimale Tableau wieder als lineares Optimierungsproblem.

   (Gehen Sie bitte für die folgenden Teilaufgaben davon aus, dass Sie auf das Problem

   $$\begin{array}{ll} \min & x_2 + x_3 - 43 \\ & x_1 + \frac{7}{5}x_2 + \frac{1}{10}x_3 = \frac{43}{10} \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

   mit der optimalen Lösung $(\frac{43}{10}, 0, 0)$ gekommen sind.)

2. Bestimmen Sie den zur Gleichung des neuen Problems gehörenden Gomory-Schnitt. Drücken Sie diesen in Abhängigkeit von x_1 und x_2 aus.

3. Bestimmen Sie nun für $k \in \{2, 3, 4, 5\}$ den Gomory-Schnitt zur Gleichung, die Sie erhalten, wenn Sie

   $$x_1 + \frac{7}{5}x_2 + \frac{1}{10}x_3 = \frac{43}{10}$$

   mit k multiplizieren. Drücken Sie diese Ungleichung in Abhängigkeit von x_1 und x_2 aus.

→ b.w.

4. Erweitern Sie das ursprünglich gegebene Optimierungsproblem um den Gomory-Schnitt für $k = 3$ aus der vorhergehenden Teilaufgabe und lösen Sie das entsprechende relaxierte lineare Optimierungsroblem mit dem Simplex-Verfahren. Was ist die Lösung des ursprünglichen ganzzahligen linearen Optimierungsproblems?

(20 Punkte)

Aufgabe 2:
Das ganzzahlige lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \max & 4x_1 + 3x_2 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

sei gegeben.
Wenden Sie die Branch-and-Bound-Methode nach Dakin (siehe Anhang) auf dieses Problem an. Geben Sie die Zwischenwerte (P_k^j, x^*, $c^T x^*$, j^*, i), die in dem Algorithmus bestimmt werden, in einer Tabelle an. Wählen Sie dabei (j^*, i) in jedem Schritt lexikographisch minimal, d.h. dass j^* minimal gewählt ist und für dieses j^* i minimal ist.

(10 Punkte)

Zusatzaufgabe: Seien $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$. Wir betrachten die beiden Polyeder

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$

und

$$P' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}^m \mid (A|I) \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = b, x \geq 0, s \geq 0 \right\}$$

(i) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in P$ ein eindeutigen Vektor $s \in \mathbb{Q}^m$ existiert mit $(x, s)^T \in P'$.

(ii) Zeigen Sie, dass $x \in P$ genau dann eine Ecke von P ist, wenn $\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \in P'$ eine Ecke von P' ist. s ist dabei der eindeutige Vektor aus Teil (i).

(10 Bonuspunkte)

Abgabetermin: 26.Juni, vor der Übung (14.15 Uhr).

Input: $(P) : \max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$ wie in der Vorlesung.
Output: Eine optimale Lösung x^* von (P) oder die Aussage, dass $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ leer ist.

begin
- $P_1^1 \leftarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$;
- $k \leftarrow 1$;
- **repeat**
  - **if** $\forall j \in [k] : P_k^j = \emptyset$ **then return** $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ *ist leer*;
  - $\mu_j \leftarrow \max\{c^T x \mid x \in P_k^j\}$ für $j \in [k]$;
  - Bestimme $j^* \in [k]$ mit $\mu_{j^*} = \max\{\mu_j \mid j \in [k]\}$;
  - Bestimme $x^* \in P_k^{j^*}$ mit $c^T x^* = \mu_{j^*}$;
  - **if** $x^* \in \mathbb{Z}^n$ **then return** x^*;
  - Bestimme $i \in [n]$ mit $x_i^* \notin \mathbb{Z}$;
  - $P_{k+1}^j \leftarrow P_k^j$ für $j \in [k] \setminus \{j^*\}$;
  - $P_{k+1}^{j^*} \leftarrow \{x \in P_k^{j^*} \mid x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor\}$;
  - $P_{k+1}^{k+1} \leftarrow \{x \in P_k^{j^*} \mid x_i \geq \lceil x_i^* \rceil\}$;
  - $k \leftarrow k + 1$;
- **until return**;

end

Algorithm 5: Branch-and-Bound Methode nach Dakin