

Übungsblatt 7

12) Für eine Lösung $X \subseteq \mathcal{F}$ des Facility Location Problems seien $c_F(X)$ die Facility Öffnungskosten und $c_S(X)$ die Verbindungskosten.

Seien γ_F und γ_S Konstanten und A ein polynomieller Algorithmus, der für jede Instanz des metrischen Facility Location Problems ohne Kapazitätsschranken eine Lösung X berechnet mit $c_F(X) + c_S(X) \leq \gamma_F c_F(X^*) + \gamma_S c_S(X^*)$ für alle $\emptyset \neq X^* \subseteq \mathcal{F}$.

Zeigen Sie, dass es einen $(\gamma_F + \gamma_S)$ -Approximationsalgorithmus für das metrische Facility Location Problem mit weichen Kapazitätsschranken gibt.

Gehen Sie folgendermaßen vor:

Sei $I = (\mathcal{D}, \mathcal{F}, (c_{ij})_{i \in \mathcal{F}, j \in \mathcal{D}}, (f_i)_{i \in \mathcal{F}}, (u_i)_{i \in \mathcal{F}})$ eine Instanz des metrischen Facility Location Problems mit weichen Kapazitätsschranken.

Transformieren Sie I in eine Instanz $I' = (\mathcal{D}, \mathcal{F}, (c'_{ij})_{i \in \mathcal{F}, j \in \mathcal{D}}, (f'_i)_{i \in \mathcal{F}})$ des metrischen Facility Location Problems ohne Kapazitätsschranken, indem sie $f'_i := f_i$ für $i \in \mathcal{F}$ und $c'_{ij} := c_{ij} + \frac{f_i}{u_i}$ für $i \in \mathcal{F}, j \in \mathcal{D}$ setzen.

- a) Zeigen Sie, dass I' eine Instanz des *metrischen* Facility Location Problems ohne Kapazitätsschranken ist.

Wenden Sie nun den Algorithmus A auf I' an. Sie erhalten eine Lösung X und $\sigma : \mathcal{D} \rightarrow X$. Diese ergibt direkt eine Lösung für das Problem mit weichen Kapazitätsschranken.

- b) Wie kann man k_i ($i \in X$) aus X und σ berechnen?

Sei nun X^*, σ^* eine optimale Lösung für das Problem mit weichen Kapazitätsschranken.

- c) Schätzen Sie die Kosten $c_F(X) + c_S(X)$ geeignet ab.

(8 Punkte)

b.w. \rightarrow

Zur Erinnerung:

Facility Location Problem mit weichen Kapazitätsschranken

Input: Eine Menge \mathcal{D} von Klienten, eine Menge \mathcal{F} von potenziellen Facilities, Kosten $f_i \in \mathbb{R}_+$, Verbindungskosten $c_{ij} \in \mathbb{R}_+$ für alle $i \in \mathcal{F}$ und $j \in \mathcal{D}$ und zusätzlich Kapazitätsschranken $u_i \in \mathbb{N}$ für jeden Standort $i \in \mathcal{F}$.

Aufgabe: Finde eine Teilmenge $X \subseteq \mathcal{F}$ von Facilities, eine Zuweisung $\sigma : \mathcal{D} \rightarrow X$ und $k_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ für alle $i \in \mathcal{F}$, so dass die Kapazitätsschranken

$$|\{j \in \mathcal{D} : \sigma(j) = i\}| \leq k_i u_i \quad \forall i \in \mathcal{F} \quad (1)$$

eingehalten werden und die Kosten

$$\sum_{i \in X} k_i f_i + \sum_{j \in \mathcal{D}} c_{\sigma(j),j} \quad (2)$$

minimiert werden.

Abgabetermin: 11. Juni, vor der Übung (12.15 Uhr).