Griffes et t-perfection

Henning Bruhn

Université Pierre et Marie Curie

07/02/2011

Graphes parfaits

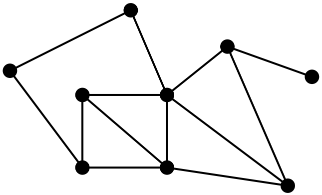
DEF G est parfait si $\chi(H) = \omega(H)$ pour chaque sous-graphe induit H

- $\chi(G)$: nombre chromatique
- $\omega(G)$: taille max d'une clique

Graphes parfaits

DEF G est parfait si $\chi(H) = \omega(H)$ pour chaque sous-graphe induit H

- $\chi(G)$: nombre chromatique
- $\omega(G)$: taille max d'une clique

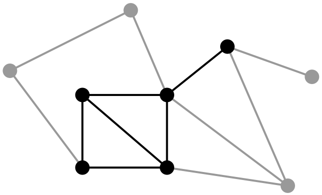


un graphe

Graphes parfaits

DEF G est parfait si $\chi(H) = \omega(H)$ pour chaque sous-graphe induit H

- $\chi(G)$: nombre chromatique
- $\omega(G)$: taille max d'une clique

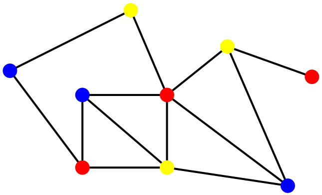


sous-graphe induit

Graphes parfaits

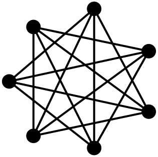
DEF G est parfait si $\chi(H) = \omega(H)$ pour chaque sous-graphe induit H

- $\chi(G)$: nombre chromatique
- $\omega(G)$: taille max d'une clique



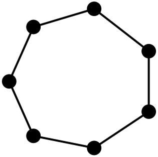
une coloration

Théorème fort des graphes parfaits



SPGT (Chudnovsky, Robertson, Seymour & Thomas)

G est parfait si et seulement si *G* ne contient ni de trou impair ni d'anti-trou impair.



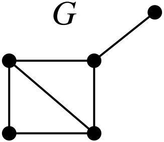
- trou : cycle induit d'une longueur ≥ 4
- anti-trou : le complément d'un trou
- Conjecture de Berge

Approches à la conjecture de Berge

- solutions partielles : graphes planaires, graphes sans griffes, graphes sans K_4,...
- approche polyédrale
- décomposition : soit un graphe Berge est imparfait ou il a un défaut structurel

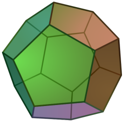
Caractérisation polyédrale

graphe



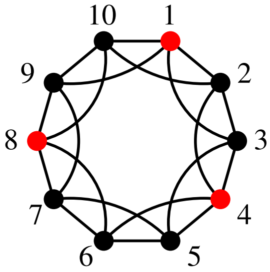
$\longrightarrow$

polytope en $\mathbb{R}^V$



G perfect $\Leftrightarrow$ polytope des stables a une structure particulière

Polytope des stables



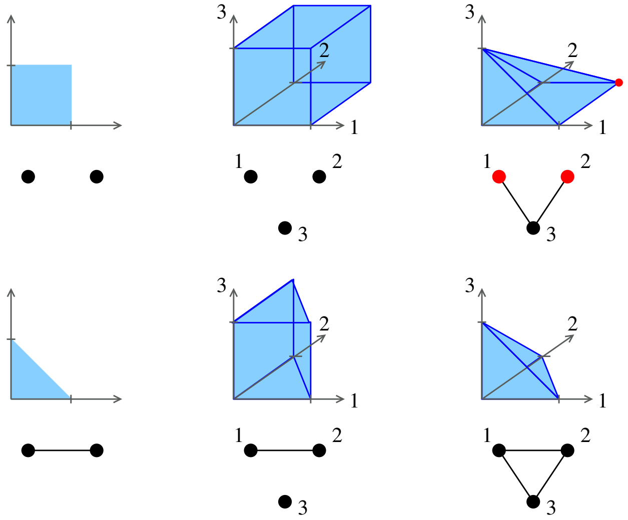
(1,0,0,1,0,0,0,1,0,0)

- graphe $G = (V, E)$
- un stable : tous deux sommets non-adjacents
- un stable $\to$ vecteur caractéristique en $\mathbb{R}^V$

Polytope des stables

$\mathrm{SSP}(G) := \mathrm{conv}(\text{stables}) \subseteq \mathbb{R}^V$

SSP de petits graphes

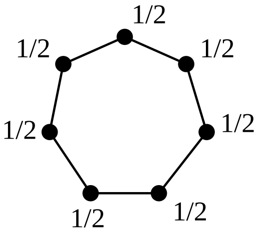


Contraintes des arêtes

Si $x \in$ SSP, alors :

Contraintes de non-négativité	$x \geq 0$
Contraintes des arêtes	$x_u + x_v \leq 1$ pour tout $uv \in E(G)$

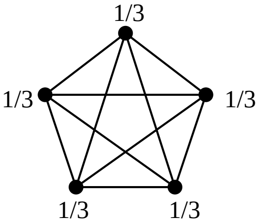
Contraintes des cycles impairs



- $x \equiv \frac{1}{2} \rightarrow$ contraintes des arêtes satisfaites
- mais $x \notin SSP(G)$

Contraintes des cycles impairs $\sum_{v \in C} x_v \leq \lfloor \frac{|C|}{2} \rfloor$ pour tout cycle impair C

Contraintes des cliques



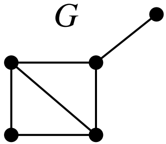
- $x \equiv \frac{1}{3} \rightarrow$ contraintes des arêtes et cycles impairs satisfaites
- mais $x \notin SSP(G)$

Contraintes des cliques $\quad \sum_{v \in K} x_v \leq 1$ pour toute clique K

Structure du SSP

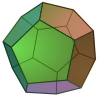
- beaucoup plus des contraintes :
  web, antiweb, clique family,..., ? ? ?
- SSP connu pour graphes adjoints (Edmonds)
- SSP connu pour graphes quasi-line
  $\rightarrow$ conjecture de Ben Rebea
  (Chudnovsky & Seymour et Eisenbrand, Oriolo, Stauffer & Ventura)

Caractérisation polyédrale



DEF $x \in \mathrm{CSTAB}(G) :\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} x \geq 0, &\quad x \in \mathbb{R}^{V(G)} \\ x_u + x_v \leq 1 &\quad \text{pour tout } uv \in E \\ \textstyle\sum_{v \in K} x_v \leq 1 &\quad \text{pour toute clique } K \end{aligned}$$



CSTAB(G)

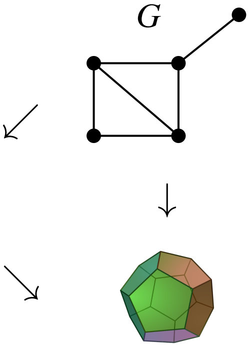
G parfait $\Leftrightarrow \mathrm{CSTAB}(G) = \mathrm{SSP}(G)$

(Chvátal/Fulkerson)

Caractérisation polyédrale

DEF $x \in \mathrm{CSTAB}(G) :\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} x \geq 0, &\quad x \in \mathbb{R}^{V(G)} \\ x_u + x_v \leq 1 &\quad \text{pour tout } uv \in E \\ \textstyle\sum_{v \in K} x_v \leq 1 &\quad \text{pour toute clique } K \end{aligned}$$

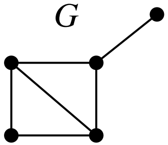


$\mathrm{CSTAB}(G)$

G parfait $\Leftrightarrow \mathrm{CSTAB}(G) = \mathrm{SSP}(G)$

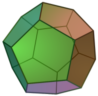
$\Leftrightarrow \mathrm{CSTAB}(G)$ entier

Graphe t-parfait



DEF $x \in \mathrm{TSTAB}(G) :\Leftrightarrow$

$$
\begin{array}{rl}
x \geq 0, & x \in \mathbb{R}^{V(G)} \\
x_u + x_v \leq 1 & \text{pour tout } uv \in E \\
\sum_{v \in C} x_v \leq \lfloor \frac{|C|}{2} \rfloor & \text{pour tout cycle impair } C
\end{array}
$$



TSTAB(G)

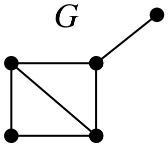
DEF G t-parfait $:\Leftrightarrow \mathrm{TSTAB}(G) = \mathrm{SSP}(G)$

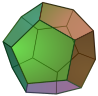
(Chvátal)

Graphe t-parfait

DEF $x \in \mathrm{TSTAB}(G) :\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} x \geq 0, &\quad x \in \mathbb{R}^{V(G)} \\ x_u + x_v \leq 1 &\quad \text{pour tout } uv \in E \\ \textstyle\sum_{v \in C} x_v \leq \lfloor \frac{|C|}{2} \rfloor &\quad \text{pour tout cycle impair } C \end{aligned}$$





TSTAB(G)

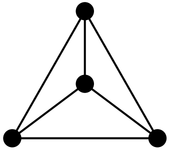
DEF G t-parfait $:\Leftrightarrow \mathrm{TSTAB}(G) = \mathrm{SSP}(G)$

$\Leftrightarrow \mathrm{TSTAB}(G)$ entier

Existence et importance

Est-ce qu'il y a des graphes t-parfaits ?

- graphes series-parallèles (Boulala & Uhry)
- graphes presque bipartis (Fonlupt & Uhry)
  $:\Leftrightarrow\ \exists v$ tel que $G - v$ est biparti
- K_4 est t-imparfait



K_4

Est-ce qu'ils sont intéressants ?

- propriétés algorithmiques

Questions principales

- Caractérisation par sous-structures interdites
  $\rightarrow$ G t-parfait $\Leftrightarrow$ G ne contient pas A, B, C ou D
- Coloration
  $\rightarrow \chi(G) \leq ?$
- Forte t-perfection

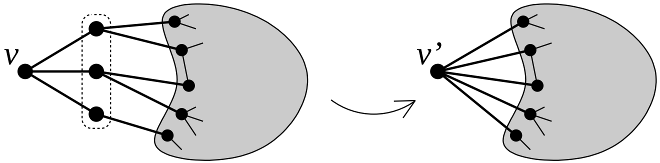
SPGT (Chudnovsky et al)

G est parfait si et seulement si G ne contient ni de trou impair ni d'anti-trou impair.

Sous-structures

t-perfection est préservé par...

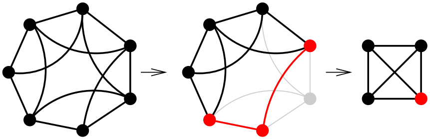
- suppression des sommets
- ~~suppression des arêtes~~
- *t*-contraction (Gerards & Shepherd)
  si $N(v)$ est stable, alors $G \to G/E(v)$



t-mineurs

DEF H t-mineur de G, si on obtient H de G par suppression des sommets et par des t-contractions

- chaque t-mineur d'un graphe t-parfait est t-parfait



Sous-structures interdites

DEF G minimalement t-imparfait, si G pas t-parfait mais chaque t-mineur propre est t-parfait

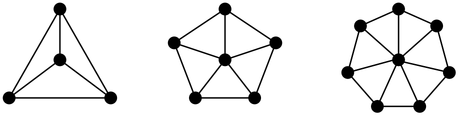
soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de tous les graphes minimalement t-imparfaits

G est t-parfait $\Leftrightarrow$ G ne contient pas de graphe de $\mathcal{F}$ comme t-mineur.

$\rightarrow$ trouver tous graphes min t-imparfaits

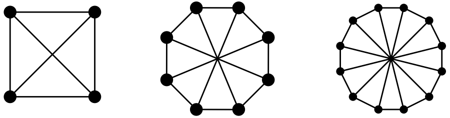
Graphes min *t*-imparfaits

- graphes roues impaires



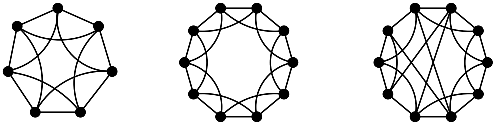
k=1 k=2 k=3 ...

- échelles Möbius de longueur paire (Shepherd)



k=1 k=2 k=3 ...

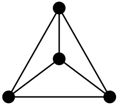
- certains graphes $(3, k)$-partitionables

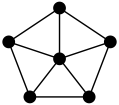


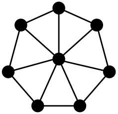
C_7^2 C_{10}^2

Graphes min t-imparfaits

- graphes roues impaires

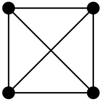

k=1

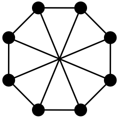

k=2

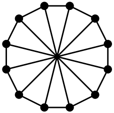

k=3

...

- échelles Möbius de longueur paire (Shepherd)

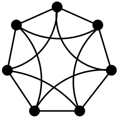

k=1

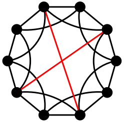

k=2

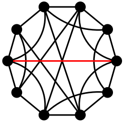

k=3

...

- certains graphes $(3, k)$-partitionables $+$ diagonales

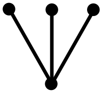

C_7^2


C_{10}^2



Graphes sans griffe

DEF G sans griffe si G ne contient pas de griffe comme sous-graphe induit.

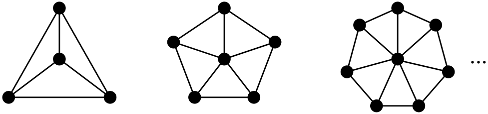


une griffe

- G sans griffe $\Rightarrow$ chaque t-mineur sans griffe

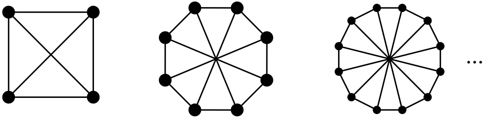
Graphes min t-imparfaits sans griffe

- graphes roues impaires



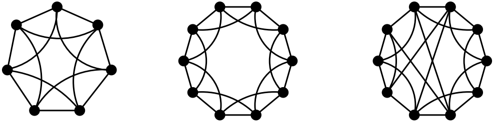
k=1 k=2 k=3

- échelles Möbius de longueur paire (Shepherd)



k=1 k=2 k=3

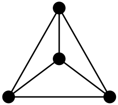
- certains graphes $(3, k)$-partitionables $+$ diagonales



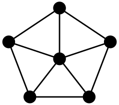
C_7^2 C_{10}^2

Graphes min t-imparfaits sans griffe

- graphes roues impaires



k=1

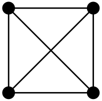


k=2

k=3

…

- échelles Möbius de longueur paire (Shepherd)



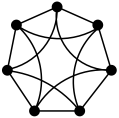
k=1

k=2

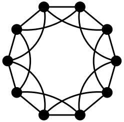
k=3

…

- certains graphes $(3, k)$-partitionables $+$ diagonales



C_7^2

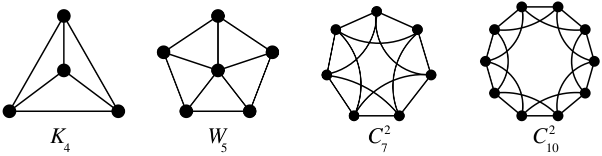


C_{10}^2

Graphes t-parfaits sans griffe

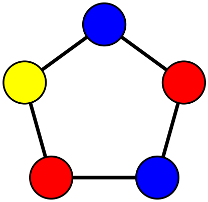
Théorème (Bruhn & Stein)

Soit G un graphe sans griffe. Alors, G est t-parfait si et seulement s'il ne compte pas K_4, W_5, C_7^2 ou C_{10}^2 parmi ses t-mineurs.



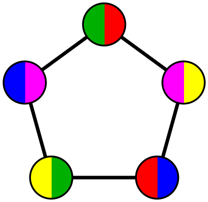
Coloration fractionnaire

Coloration



$\chi = 3$

Coloration fractionnaire



$\chi^* = 2.5$

- $\omega(G) \leq \chi^*(G) \leq \chi(G)$
- $\mathrm{og}(G)$: longeur min d'un cycle impair
- G *t*-parfait $\Rightarrow \chi^*(G) = 2\frac{\mathrm{og}(G)}{\mathrm{og}(G)-1} \leq 3$

Caractérisation fractionnaire ?

DEF G est parfait si $\chi(H) = \omega(H)$ pour tout sous-graphe induit H.

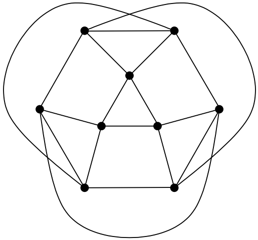
En fait : G parfait $\Leftrightarrow \chi^*(H) = \omega(H)$ pour tout sous graphe induit H

Conjecture

Un graphe G est t-parfait si et seulement si $\chi^*(H) = 2\frac{\mathrm{og}(H)}{\mathrm{og}(H)-1}$ pour tout t-mineur H de G.

$\rightarrow$ vrai pour tout graphe sans griffe

Coloration des graphes t-parfaits



t-parfait & $\chi = 4$

Conjecture (Sebő/Shepherd)

Soit G t-parfait. Alors $\chi(G) \leq 4$.

Théorème (Bruhn & Stein)

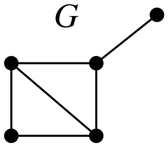
Soit G un graphe t-parfait sans griffe. Alors $\chi(G) \leq 3$.

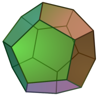
- algorithme de coloration de temps polynomial

Graphe t-parfait

DEF $x \in \mathrm{TSTAB}(G)$ $:\Leftrightarrow$

$$
\begin{array}{rl}
x \geq 0, & x \in \mathbb{R}^{V(G)} \\
x_u + x_v \leq 1 & \text{pour tout } uv \in E \\
\sum_{v \in C} x_v \leq \lfloor \frac{|C|}{2} \rfloor & \text{pour tout cycle impair } C
\end{array}
$$





TSTAB(G)

DEF G t-parfait $:\Leftrightarrow$ $\mathrm{TSTAB}(G) = \mathrm{SSP}(G)$

$\Leftrightarrow$ TSTAB(G) entier

Graphe fortement t-parfait

primal

$$\max \sum_{v \in V} w_v x_v$$

$$x \geq 0$$

$$x_u + x_v \leq 1 \quad \forall uv \in E$$

$$\sum_{v \in C} x_v \leq \lfloor \tfrac{|C|}{2} \rfloor \quad \forall \text{ cycle impair } C$$

dual

$$\min \sum_{e \in E} y_e + \sum_C \lfloor \tfrac{|C|}{2} \rfloor y_C$$

$$y \geq 0$$

$$\sum_{e : v \in e} y_e + \sum_{C : v \in C} y_C \geq w_v \quad \forall v \in V$$

TSTAB(G) entier

$\Uparrow$ TDI

programme dual a une solution entière pour chaque $w \in \mathbb{Z}^V$

Graphe fortement t-parfait

primal

$$\max \sum_{v \in V} w_v x_v$$

$$x \geq 0$$

$$x_u + x_v \leq 1 \quad \forall uv \in E$$

$$\sum_{v \in C} x_v \leq \lfloor \tfrac{|C|}{2} \rfloor \quad \forall \text{ cycle impair } C$$

dual

$$\min \sum_{e \in E} y_e + \sum_C \lfloor \tfrac{|C|}{2} \rfloor y_C$$

$$y \geq 0$$

$$\sum_{e : v \in e} y_e + \sum_{C : v \in C} y_C \geq w_v \quad \forall v \in V$$

DEF G fortement t-parfait

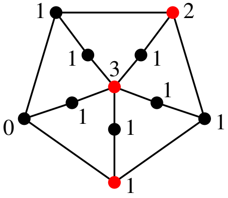
si

programme dual a une solution entière pour chaque $w \in \mathbb{Z}^V$

Stabilité avec poids

Etant donné $w \in \mathbb{Z}^V$

$\alpha_w := \max \sum_{s \in S} w_s$: S stable



$\Rightarrow \alpha_w = 6$

w-recouvrement

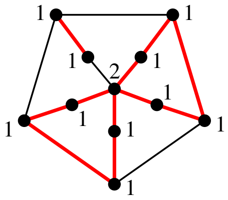
Etant donné $w \in \mathbb{Z}^V$

w-recouvrement : famille $\mathcal{K} = \mathcal{E} \cup \mathcal{C}$

$\rightarrow$ arêtes $\mathcal{E}$ et cycles impairs $\mathcal{C}$

$\rightarrow$ chaque $v \in V$ en $\geq w_v$ membres de $\mathcal{K}$

coût de $\mathcal{K}$: $|\mathcal{E}| + \sum_{C \in \mathcal{C}} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor$



$\Rightarrow$ w-recouvrement de coût 5

$\rightarrow$ coût de w-recouvrement $\geq \alpha_w$

Formulation combinatoire

Etant donné $w \in \mathbb{Z}^V$

dual

$$\min \sum_{e \in E} y_e + \sum_C \lfloor \tfrac{|C|}{2} \rfloor y_C$$

$$y \geq 0$$

$$\sum_{e: v \in e} y_e + \sum_{C: v \in C} y_C \geq w_v \quad \forall v \in V$$

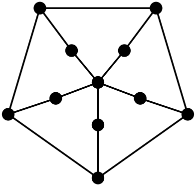
$\alpha_w := \max \sum_{s \in S} w_s$: S stable

w-recouvrement : famille $\mathcal{K} = \mathcal{E} \cup \mathcal{C}$
$\rightarrow$ arêtes $\mathcal{E}$ et cycles impairs $\mathcal{C}$
$\rightarrow$ chaque $v \in V$ en $\geq w_v$ membres de $\mathcal{K}$

coût de $\mathcal{K}$: $|\mathcal{E}| + \sum_{C \in \mathcal{C}} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor$

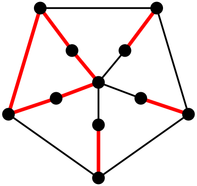
G fortement t-parfait
$\Updownarrow$
existe w-recouvrement de coût α_w pour chaque $w \in \mathbb{Z}^V$

Exemple I



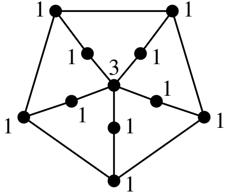
$w \equiv 1 \Rightarrow \alpha_w = 5$

$\longrightarrow$



coût$= 5$

Exemple II



$\Rightarrow \alpha_w = 5$

$\longrightarrow$

coût 5 :

$2\cdot$  $+1\cdot$  $= 12$

mais : $\sum_{v \in V} w_v = 13$

$\Rightarrow$ pas de w-recouvrement de coût 5

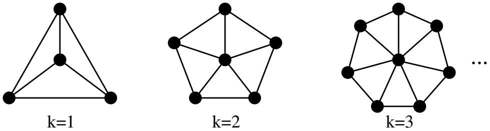
Graphes fortement min t-imparfaits

Comme pour la t-perfection...

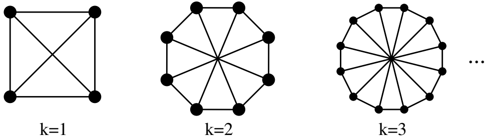
- G fortement t-parfait $\Rightarrow$ chaque t-mineur fortement t-parfait
- définir minimalement fortement t-imparfait
- trouver tous les graphes minimalement fortement t-imparfaits !

Graphes min fortement t-imparfaits

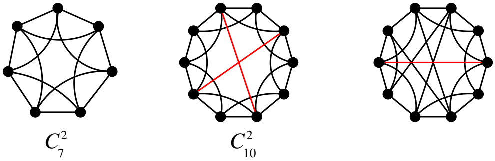
- graphes roues impaires



- échelles Möbius de longueur paire (Shepherd)



- certains graphes $(3, k)$-partitionables $+$ diagonales



Plus fort ?

Evidemment :

- fortement t-parfait
  $\Rightarrow$ t-parfait

Question

Fortement t-parfait $\neq$ t-parfait ?

Théorème (Bruhn & Stein)

Un graphe sans griffe est fortement t-parfait si et seulement s'il est t-parfait.

Merci beaucoup !