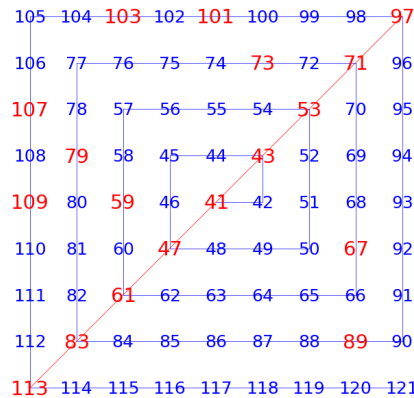


Prof. Dr. Stefan Wewers
 Tudor Micu
 Institut für Reine Mathematik

Master-Vorlesung im WS 17/18

Algebraische Zahlentheorie

Betrachtet man die folgende spiralförmige Anordnung der natürlichen Zahlen $n \geq 41$, so stellt man etwas Überraschendes fest (wenn man die vorkommenden Primzahlen in Rot druckt):



Alle Zahlen auf der Nebendiagonale sind Primzahlen! Kann das Zufall sein oder gibt es eine Erklärung für dieses Phänomen?

Eine ähnliche Überraschung erlebt man, wenn man sich die Dezimalentwicklung der reellen Zahlen $e^{\pi\sqrt{n}}$ für $n \in \mathbb{N}$ anschaut. Für einige Werte von n erhalten wir ‘fast’ eine ganze Zahl, z.B.

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743,99999999999250\dots$$

Auch hier kann man sich die Frage stellen, ob dies Zufall ist oder ob wir einem mathematischen Geheimnis auf der Spur sind.

Erstaunlicherweise kann man beide Phänomene mit derselben Tatsache erklären: der Ring $\mathbb{Z}[\alpha] \subset \mathbb{C}$, der durch Adjunktion der komplexen Zahl

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{-163}}{2}$$

zu den ganzen Zahlen entsteht, ist *faktoriell*, d.h. erlaubt eine eindeutige Zerlegung seiner Elemente in Primfaktoren.

Traditionell versteht man unter *Zahlentheorie* das Studium der ganzen bzw. rationalen Zahlen. In der langen Geschichte der Zahlentheorie hat sich aber gezeigt, dass man den tieferen Geheimnissen der Zahlen nur dann auf den Grund kommt, wenn man auch gewisse endliche Erweiterungen der Ringe \mathbb{Z} und \mathbb{Q} studiert. Das systematische Studium solcher Erweiterungen nennt man *algebraische Zahlentheorie*. Die angekündigte Vorlesung ist eine Einführung in diese Theorie. Wir behandeln u.A. die folgenden Themen:

- Algebraische Zahlkörper
- Dirichletscher Einheitensatz
- Endlichkeit der Klassenzahl
- Zeta- und L-Reihen
- Dirichletscher Primzahlsatz
- Reziprozitätsgesetze

Nach Absprache mit den Studierenden kann diese Vorlesung auch auf Englisch gehalten werden. Das benötigte Vorwissen beschränkt sich auf die Inhalte der Anfängervorlesung und den Vorlesungen *Elemente der Algebra* und *Elemente der Funktionentheorie*. Kenntnisse aus *Elementare Zahlentheorie* sind nützlich aber nicht notwendig.

Vorlesung: Mi 8 - 10 Uhr, He 18/120, und Fr 10 - 12 Uhr, N24/254

Übung: tba

Weiter Informationen:

<https://www.uni-ulm.de/mawi/rmath/lehre/wintersemester-201718/ws14-az1/>