Prof. Dr. Stefan Wewers
Christian Steck
Institut für Reine Mathematik

Seminar im SS 13

Ideen der algebraischen Topologie

vorläufiges Programm

Stand: 9.4.2013

1 Einführung

Ziel des Seminars ist, die Teilnehmer mit den Grundideen und Techniken der algebraischen Topologie vertraut zu machen. Als Quelle werden wir das Buch von Fulton ([2], Part I-III) und ein Vorlesungsskript von Ebeling und Hulek ([1], Teil I und Teil II bis §6) verwenden.

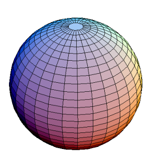
In der algebraischen Topologie geht es darum, die globale Gestalt geometrischer Objekte zu studieren. Das Wort *Topologie* bedeutet dabei, dass man sich in erster Linie für die Eigenschaften der behandelten Objekte interessiert, die unter stetigen Abbildungen invariant bleiben. Man stellt sich gewissermaßen vor, dass alles aus beliebig elastischem Gummi gemacht ist. Das Adjektiv *algebraisch* bedeutet, dass die Invarianten, die man betrachtet, mit Methoden der Algebra definiert und berechnet werden.

1.1 Ein erstes Beispiel

Zur Illustration betrachten wir das folgenden Beispiel. Sei

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

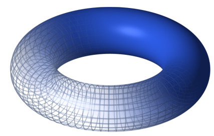
die 2-Sphäre,



und $T \subset \mathbb{R}^3$ ein *Torus*, genauer: die durch die folgende Parametrisierung definierte Rotationsfläche:

$$\begin{aligned} x &= (2 + \cos\phi)\cos\theta, \\ y &= (2 + \cos\phi)\sin\theta, \\ z &= \sin\theta, \end{aligned}$$

mit $\phi, \theta \in [0, 2\pi]$.



Diese zwei Objekte haben einige Gemeinsamkeiten:

- S und T sind kompakte, zusammenhängende Teilmengen des $\mathbb{R}^3$.
- S, T sind glatte Flächen, d.h. jeder Punkt P auf S (bzw. T) besitzt eine offene Umgebung U, die eine Parametrisierung der Form

$$V := [0,1]^2 \xrightarrow{\sim} U, (s,t) \mapsto (\psi_x(s,t), \psi_y(s,t), \psi_z(s,t))$$

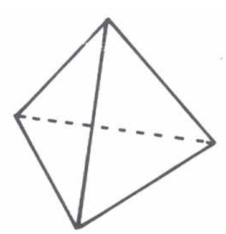
durch stetig differenzierbare Funktionen ψ_x, ψ_y, ψ_z besitzt.

Es ist trotzdem offensichtlich, dass S und T sehr 'verschieden' sind. Der folgende Satz besagt, dass S und T als topologische Räume 'verschieden' sind.

Satz 1.1 *Die 2-Sphäre S und der Torus T sind nicht homöomorph, d.h. es gibt keine stetige und bijektive Abbildung $f : S \xrightarrow{\sim} T$, dessen Umkehrabbildung wieder steig ist.*

So offensichtlich die Aussage des Satzes auch zu sein scheint, so schwierig ist es, einen wasserdichten Beweis mit 'elementaren Methoden' (z.B. aus Analysis 2) anzugeben. Das Problem liegt daran, dass die Analysis sich vor allem mit 'lokalen' Eigenschaften von Abbildungen (wie z.B. Stetigkeit und Differenzierbarkeit) beschäftigt, die beiden Räume S und T sich lokal aber völlig ähnlich sind. Die algebraische Topologie stellt nun gerade die notwendigen Hilfsmittel bereit, um S und T anhand ihrer 'globalen' Eigenschaften zu unterscheiden.

Eine wichtige Technik dabei ist die Wahl einer *Triangulierung*. Sei X eine (topologische) Fläche (wie zum Beispiel die 2-Sphäre). Eine Triangulierung von X besteht aus einer lückenlosen Überdeckung von X durch 'Dreiecke', so dass je zwei Dreiecke entweder disjunkt sind oder genau eine Kante gemeinsam haben. Dies ist zugegebenermaßen keine exakte Definition, aber das folgenden Beispiel sollte trotzdem hinreichende Klarheit schaffen: ist $X = S$ die 2-Sphäre, so erhält man eine Triangulierung von X, indem man X mit der Oberfläche eines Tetraeders identifiziert.



Genauer: wir wählen einen Homöomorphismus zwischen der Sphäre X und der Oberfläche eins Tetraeders.

Satz 1.2 *Sei X eine kompakte Fläche und $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von X. Es sei*

$$\begin{aligned} e &:= \text{Anzahl der Ecken von } \mathcal{T}, \\ k &:= \text{Anzahl der Kanten von } \mathcal{T}, \\ f &:= \text{Anzahl der Dreiecke von } \mathcal{T}. \end{aligned}$$

Dann ist die Zahl

$$\chi(X) := e - k + f$$

unabhängig von der Wahl der Triangulierung.

Definition 1.3 Die durch den Satz definierte Zahl $\chi(X) \in \mathbb{Z}$ heisst die *Euler-Poincaré-Charakteristik* von X.

Beispiel 1.4 Sei $X = S$ die 2-Sphäre und die $\mathcal{T}_S$ die Triangulierung von S durch ein Tetraeder. Dann gilt $e = 4$, $k = 6$, $f = 4$, also

$$\chi(S) = 4 - 6 + 4 = 2.$$

Der Satz 1.2 besagt also, dass für jede Triangulierung der Sphäre gilt:

$$e - k + f = 2.$$

Diese Aussage ist auch als die *Eulersche Polyederformel* bekannt.

Der Torus T besitzt eine Triangulierung $\mathcal{T}_T$ mit $e = 4$, $k = 12$ und $f = 8$. Es gilt also

$$\chi(T) = 4 - 12 + 8 = 0.$$

Die Euler-Poincaré-Charakteristik der beiden Flächen S und T ist also verschieden. Daraus folgt leicht, dass S und T nicht homöomorph sein können.

Wir haben somit gezeigt, dass Satz 1.1 aus Satz 1.2 folgt.

Ein Beweis von Satz 2 ist technisch aufwändig, die Grundidee lässt sich aber leicht nachvollziehen. Sei X eine kompakte Fläche und $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von X. Wir schreiben

$$\chi(\mathcal{T}) := e - k + f$$

(mit der Notation aus Definition 1.3). Sei F ein Dreieck von $\mathcal{T}$ und P ein Punkt im Inneren von F. Es seien K_1, K_2, K_2 neue Kanten, die P mit den drei Ecken von F verbinden und (bis auf den gemeinsamen Punkt P) paarweise disjunkt sind. Offenbar zerteilen K_1, K_2, K_3 das Dreieck F in drei Teildreicke F_1, F_2, F_3. Wir erhalten eine neue Triangulierung $\mathcal{T}'$ von X, indem wir F durch F_1, F_2, F_3 ersetzen. Wir nennen $\mathcal{T}'$ eine *einfache Verfeinerung* von $\mathcal{T}$.

Sind e, k, f (bzw. e', k', f') die Kennzahlen der Triangulierung $\mathcal{T}$ (bzw. von $\mathcal{T}'$) aus Definition 1.3, so gilt nach Konstruktion:

$$e' = e + 1, \quad k' = k + 3, \quad f' = f + 2.$$

Es gilt also insbesondere

$$\chi(\mathcal{T}') = e' - k' + f' = e - k + f = \chi(\mathcal{T}).$$

Wir nennen $\mathcal{T}'$ eine *Verfeinerung* von $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{T}'$ aus $\mathcal{T}$ durch eine Folge von einfachen Verfeinerungen aus $\mathcal{T}$ hervorgeht. Wie gezeigt gilt dann $\chi(\mathcal{T}') = \chi(\mathcal{T})$. Satz 1.2 folgt nun sofort aus dem folgenden Lemma.

Lemma 1.5 *Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Triangulierungen einer kompakten Fläche X. Dann gibt es Triangulierungen $\mathcal{T}_1', \mathcal{T}_2'$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für $i = 1, 2$ haben $\mathcal{T}_i$ und $\mathcal{T}_i'$ jeweils die gleiche Anzahl von Ecken, Kanten und Dreiecken. Insbesondere gilt $\chi(\mathcal{T}_i) = \chi(\mathcal{T}_i')$.*

(ii) *$\mathcal{T}_1'$ und $\mathcal{T}_2'$ besitzen eine gemeinsame Verfeinerung $\mathcal{T}_3$.*

Der Beweis von Lemma 1.5 ist etwas technisch, aber auch nicht besonders schwer.

1.2 Homologiegruppen

Das obige Beispiel illustriert eine für die Topologie typische Vorgehensweise. Durch eine mehr oder minder raffinierte Konstruktion ordnen wir jedem topologischen Raum X (evtl. mit gewissen Zusatzeigenschaften) eine Invariante zu. Im obigen Beispiel konnten wir z.B. jeder kompakten Fläche X eine ganze Zahl $\chi(X) \in \mathbb{Z}$ zuordnen. Das Wort *Invariante* bedeutete in diesem Zusammenhang, dass $\chi(X) = \chi(Y)$ gilt, wenn X und Y homöomorph, also als topologische Räume 'äquivalent' sind. Solche Invarianten sind sehr nützlich, wenn man zeigen möchte, dass zwei topologische Räume *nicht* homöomorph sind: es reicht dann zu zeigen, dass die zugehörigen Invarianten verschieden sind. Der oben skizzierte Beweis von Satz 1.1 illustriert diese Vorgehensweise.

In vielen Situationen reicht es aber nicht aus, zu wissen, dass X und Y nicht homöomorph sind, sondern man möchte auch Informationen über mögliche stetige Abbildungen $f : X \to Y$ haben, die nicht notwendigerweise Homöomorphismen sind. Ein sehr schönes Beispiel hierfür liefert der Brouwersche Fixpunktsatz.

Satz 1.6 (Brouwerscher Fixpunktsatz) *Für $n \in \mathbb{N}$ sei*

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

die n-dimensionale Einheitskugel. Dann besitzt jede stetige Abbildung $f : D^n \to D^n$ einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in D^n$ mit $f(x) = x$.

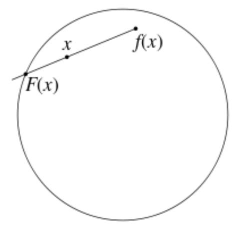
Fast alle Beweise dieses berühmten Satzes beginnen mit der folgenden Konstruktion. Angenommen, es gibt eine stetige und *fixpunktfreie* Abbildung $f : D^n \to D^n$. Sei

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \subset D^n$$

die Einheitssphäre der Dimension $n-1$ (dies ist der Rand von D^n in $\mathbb{R}^n$). Für $x \in D^n$ sei $F(x) \in S^{n-1}$ der Schnittpunkt von S^{n-1} mit der Halbgeraden, die bei $f(x)$ beginnt und durch x führt. Dann ist

$$F : D^n \to S^{n-1}, \quad x \mapsto F(x)$$

eine stetige Abbildung. Man beachte, wie die Voraussetzung, dass f fixpunktfrei ist, also $f(x) \neq x$ gilt, in die Definition von F eingeht!



Offenbar hat die Abbildung $F : D^n \to S^{n-1}$ die zusätzliche Eigenschaft, dass $F(x) = x$ gilt für alle $x \in S^{n-1}$. Anders ausgedrückt: wenn wir mit $i : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ die Inklusionsabbildung bezeichnen, so gilt

$$F \circ i = F|_{S^{n-1}} = \mathrm{Id}_{S^{n-1}}.$$

Allgemein nennt man eine stetige Abbildung $F : X \to A$ eines topologischen Raumes X auf eine Teilmenge $A \subset X$ einen *Retrakt*, wenn $F|_A = \mathrm{Id}_A$ gilt. Gibt es so ein F, so heißt A ein *Retrakt* von X.

Die obige Konstruktion, die einer fixpunktfreien stetigen Abbildung $f : D^n \to D^n$ einen Retrakt $F : D^n \to S^{n-1}$ zuordnet, reduziert den Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes auf die folgende Aussage.

Satz 1.7 *$S^{n-1} \subset D^n$ ist kein Retrakt von D^n.*

Die algebraische Topologie liefert uns ein wunderbares Werkzeug, mit dessen Hilfe ein Beweis dieses Satzes nur wenige Zeilen lang ist: die sogenannten Homologiegruppen.

Sei allgemein X ein topologischer Raum und $q \geq 0$ ein ganze Zahl. Die $q$te *(singuläre) Homologiegruppe*

$$H_q(X) = H_q(X, \mathbb{Z})$$

ist eine abelsche Gruppe (d.h. ein $\mathbb{Z}$-Modul), deren Definition wir im Laufe des Seminars kennenlernen werden. Für den Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes reicht es, wenn man die folgenden Eigenschaften der Homologiegruppen kennt.

Satz 1.8 (i) *Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert einen Gruppenhomomorphismus*

$$H_q(f) : H_q(X) \to H_q(Y).$$

Ist $g : Y \to Z$ eine weitere stetige Abbildung, so gilt

$$H_q(f \circ g) = H_q(f) \circ H_q(g).$$

(ii) *Für die Einheitskugel D^n gilt:*

$$H_q(D^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ \{0\}, & q > 0. \end{cases}$$

(iii) *Für die Einheitsphäre S^{n-1}, $n > 1$, gilt*

$$H_q(S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, n-1, \\ \{0\}, & q \neq 0, n-1. \end{cases}$$

Der Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes ist nun leicht. Angenommen, es gäbe einen Retrakt $F : D^n \to S^{n-1}$. Insbesondere gilt $F \circ i = \mathrm{Id}_{S^{n-1}}$. Aus Satz 1.8 (i) folgt dann

$$\mathrm{Id}_{H_q(S^{n-1})} = H_q(F) \circ H_q(i).$$

Daraus schließen wir, dass die von der Einbettung $i : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ induzierte Homomorphismus

$$H_q(i) : H_q(S^{n-1}) \to H_q(D^n)$$

injektiv ist. Aber für $q = n-1$ sagt Satz 1.8 (ii),(iii), dass

$$H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}, \quad H_{n-1}(D^n) = \{0\}.$$

Es kann also unmöglich einen injektiven Homomorphismus von $H_{n-1}(S^{n-1})$ nach $H_{n-1}(D^n)$ geben. Damit erhalten wir den gewünschten Widerspruch.

Fortsetzung folgt...

2 Programm des Seminars

Die genaue Aufteilung in Vorträge werden wir in Abhängigkeit von der endgültigen Teilnehmerzahl vornehmen. Insgesamt ist das Programm in zwei thematische Blöcke unterteilt. Im ersten Block befassen wir uns mit der deRham-Kohomologie von Teilmengen der Ebene. Hauptquelle ist das Buch von Fulton [2], Teil I-III. Im zweiten Block wollen wir uns dann der Konstruktion der singulären Homologiegruppen $H_q(X)$ (für beliebige topologische Räume X) zuwenden. Dabei richten wir uns vor allem nach [1], Teil I-II.

- **1. Teil** Wir werden uns in erstem Teil des Seminars auf eine sehr spezielle Situation beschränken und die Topologie von Teilmengen der Ebene $\mathbb{R}^2$ studieren. Unsere Hilfsmittel kommen aus der Analysis (Pfadintegrale) und führen zur Definition und Berechnung der der sogenannten *deRham-Kohomologiegruppen* $H^q(U)$ für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ (allerdings nur für $q = 0, 1$).

Das Material der ersten beiden Vorträge ist analog zu Betrachtungen über Kurvenintegrale, die man üblicherweise in der Funktionentheorie – insbesondere beim Residuensatz – anstellt.

(i) **Pfadintegrale:**

- 1- und 2-Formen in der Ebene
- Definition des Pfadintegrals $\int_\gamma \omega$
- Eine 1-Form ω ist *exakt* (d.h. $\omega = df$) genau dann, wenn $\int_\gamma \omega = 0$ gilt für jeden geschlossenen Weg γ.
- Ist ω exakt, so gilt $d\omega = 0$.
- Ist U ein Quadrat, so gilt sogar: $d\omega = 0 \Leftrightarrow \omega = df$.
- Verallgemeinerung auf $U = U_1 \cup U_2$, falls $U_1 \cap U_2$ zusammenhängend ist.

Quelle: [2], §1

(ii) **Windungszahlen:**

- Definition der Windungszahl $W(\gamma, P)$
- Invarianz von $W(\gamma, P)$ unter stetiger Deformation von γ
- Invarianz unter Variation des Punktes P
- Anwendung 1: Fundamentalsatz der Algebra
- Anwendung 2: Brouwerscher Fixpunktsatz für D^2

Quelle: [2], §2-4

(iii) **deRham-Kohomologie und der Jordansche Kurvensatz:**

- Definition von $H^0(U)$ und $H^1(U)$
- $H^0(U) \cong \mathbb{R}^n$, wobei n die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von U ist.
- $H^1(U)$ bestimmen für $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$
- Definition von $\delta : H^0(U \cap V) \to H^1(U \cup V)$
- Kern und Kokern von δ
- Beweis des Jordanschen Kurvensatzes

Quelle: [2], §5

- **2. Teil** Im zweiten Teil des Seminars werden wir auf systematische Weise die singulären Homologiegruppen $H_q(X)$ für beliebige topologische Räume X und alle $q \geq 0$ einführen. Es werden keine besonderen Vorkenntnisse benutzt, nur die Grundbegriffe der Algebra und der mengentheoretischen Topologie (topologische Räume, offene Teilmengen, Zusammenhang). Der Schwierigkeitsgrad dürfte trotzdem höher liegen als im 1. Teil, da die Situation viel allgemeiner und die Konstruktionen recht abstrakt sind.

(i) **Zielsetzung und Überblick:**
   - Adhoc-Definition von $H_0(X)$ und $H_1(X)$ ([2], §6)
   - Welche Eigenschaften sollen die Homologiegruppen $H_q(X)$ haben? [1], p.44
   - Anwendungen (z.B. der Brouwersche Fixpunktsatz)

(ii) **Definition von $H_q(X)$ und erste Eigenschaften:**
   - affine Simplizes
   - singuläre q-Simplizes, $\delta \circ \delta = 0$
   - Definition von $H_q(X)$
   - Homologie eines Kettenkomplexes
   - Bestimmen von $H_q(\{x\})$ und $H_0(X)$

   Quelle: [1], II, §1-2

(iii) **Homotopieinvarianz von $H_q(X)$** Quelle: [1], II, §3

(iv) **Berechnung von $H_q(S^n)$** Quelle: [1], II, §4-6

References

[1] W. Ebeling and K. Hulek. Algebraische Topologie. Vorlesungsskript, Universität Hannover.

[2] W. Fulton. *Algebraic Topology – a first course*. Springer-Verlag, 1995.