Die Musik der Primzahlen, II

Der Primzahlsatz und die Riemannsche Vermutung

Prof. Dr. Stefan Wewers

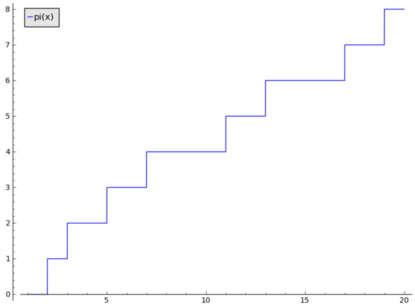
Institut für Algebra und Zahlentheorie
Universität Ulm

23. April 2021

Rückblick: der Primzahlsatz

Sei

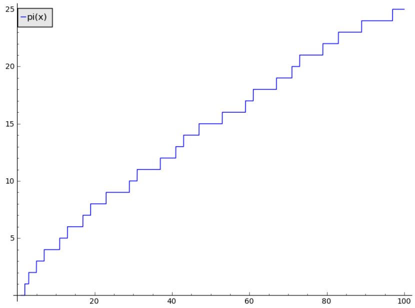
$$\pi(x) := \text{Anzahl der Primzahlen } p \leq x.$$



Rückblick: der Primzahlsatz

Sei

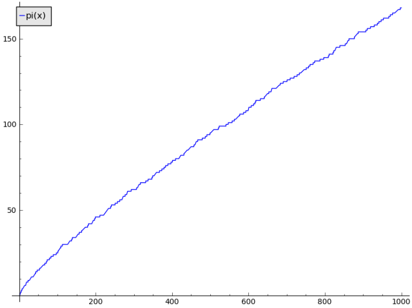
$$\pi(x) := \text{Anzahl der Primzahlen } p \leq x.$$



Rückblick: der Primzahlsatz

Sei

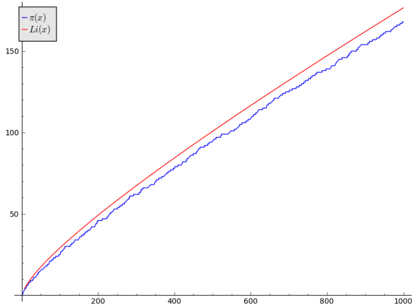
$$\pi(x) := \text{Anzahl der Primzahlen } p \leq x.$$



Rückblick: der Primzahlsatz

Sei

$$\pi(x) := \text{Anzahl der Primzahlen } p \leq x.$$



Satz (Hadamard, de La Vallée Poussin, 1896)

$$\pi(x) \sim Li(x) \quad \textit{für } x \to \infty,$$

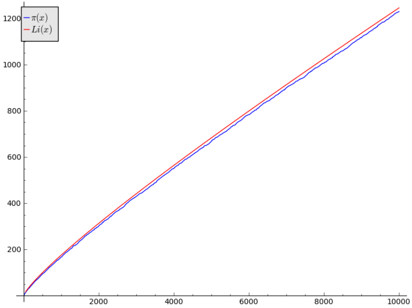
wobei

$$Li(x) := \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log(x)}.$$

Rückblick: der Primzahlsatz

Sei

$$\pi(x) := \text{Anzahl der Primzahlen } p \leq x.$$



Satz (Hadamard, de La Vallée Poussin, 1896)

$$\pi(x) \sim Li(x) \quad \textit{für } x \to \infty,$$

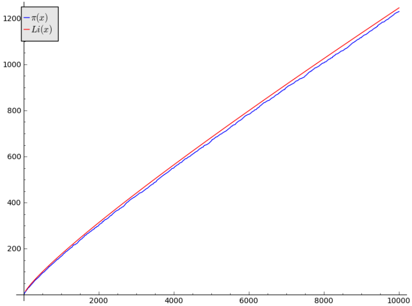
wobei

$$Li(x) := \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log(x)}.$$

Rückblick: der Primzahlsatz

Sei

$$\pi(x) := \text{Anzahl der Primzahlen } p \leq x.$$



Heuristische Interpretation

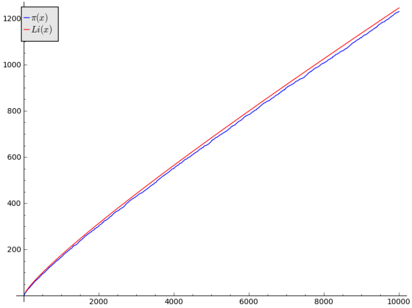
Die ‘Wahrscheinlichkeit’, dass eine zufällig gewählte Zahl n eine Primzahl ist, ist

$$P(n \in \mathbb{P}) \sim \frac{1}{log(n)}.$$

Rückblick: der Primzahlsatz

Sei

$$\pi(x) := \text{Anzahl der Primzahlen } p \leq x.$$



Die Riemannsche Vermutung

würde zeigen:

$$\pi(x) = Li(x) + \mathcal{O}\left(\sqrt{x}\log(x)\right).$$

Rückblick: die Riemannsche Vermutung

Die Riemannsche Vermutung ist bis heute nicht bewiesen und gilt als das größte offene Problem der Mathematik.

D. Hilbert (1862-1943) antwortete auf die Frage '*Wenn Sie in 500 Jahren wieder aufwachen würden, was würden Sie dann tun?*':

Rückblick: die Riemannsche Vermutung

Die Riemannsche Vermutung ist bis heute nicht bewiesen und gilt als das größte offene Problem der Mathematik.

D. Hilbert (1862-1943) antwortete auf die Frage '*Wenn Sie in 500 Jahren wieder aufwachen würden, was würden Sie dann tun?*':

> *Ich würde fragen, ob jemand die Riemannsche Vermutung gelöst hätte.*

Rückblick: die Riemannsche Vermutung

Die Riemannsche Vermutung ist bis heute nicht bewiesen und gilt als das größte offene Problem der Mathematik.

D. Hilbert (1862-1943) antwortete auf die Frage '*Wenn Sie in 500 Jahren wieder aufwachen würden, was würden Sie dann tun?*':

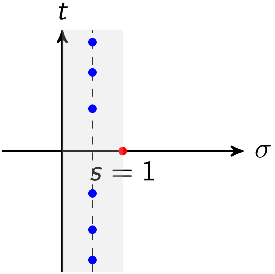
> *Ich würde fragen, ob jemand die Riemannsche Vermutung gelöst hätte.*

Seit 2000 ist die R.V. eines der 7 mathematischen *Jahrtausendprobleme*, auf die vom *Clay Mathematics Institute* ein Preis von 1.000.000 $ ausgeschrieben ist.

Rückblick: Die Riemannsche Vermutung

Die Riemannsche Vermutung macht eine Aussage über die Position der Nullstellen der **Riemannschen ζ-Funktion**:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \overset{!}{=} \prod_{p} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$



Der Primzahlsatz ist äquivalent zu der Aussage, dass es keine Nullstellen mit Realteil ≥ 1 gibt!

Die Musik der Primzahlen

Die Riemannsche Vermutung ist äquivalent zur (bestmöglichen) Abschätzung des Fehlerterms im Primzahlsatz:

$$|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| = \mathcal{O}(\sqrt{x}\log(x)).$$

Die Musik der Primzahlen

Die Riemannsche Vermutung ist äquivalent zur (bestmöglichen) Abschätzung des Fehlerterms im Primzahlsatz:

$$|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| = \mathcal{O}(\sqrt{x}\log(x)).$$

Zitat von M.V. Berry (einem Physiker!):

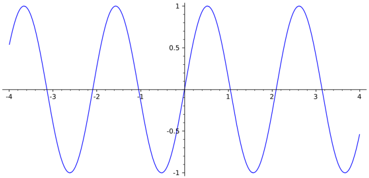
> *..there is a sense in which we can give a one-line non-technical statement of the Riemann hypothesis: 'The primes have music in them!'*

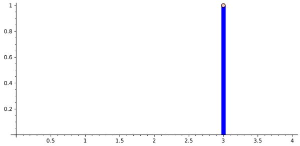
Fourier-Transformation

Eine (reine) Schwingung kann man mathematisch durch eine Sinus- oder Cosinusfunktion modellieren:

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Dabei ist A die *Amplitude* ('Lautstärke') und ω die *Frequenz* ('Tonhöhe').



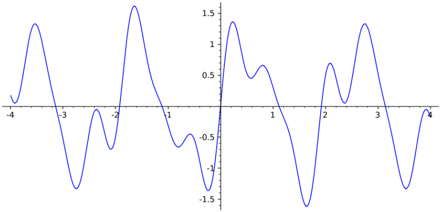


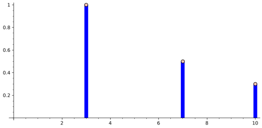
Fourier-Transformation

Komplizierte Schwingungen erhält man als Überlagerungen von reinen Schwingungen:

$$f(t) = \sum_i A_i \sin(\omega_i \cdot t).$$

Die Menge der Frequenzen $\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ heißt das *Spektrum* der Schwingung.





Fouriertransformation

Im Prinzip läßt sich jedes Signal als eine Überlagerung von reinen Schwingungen darstellen. In der Nachrichtentechnik nennt man dies eine *Frequenzanalyse*.

Fouriertransformation

Im Prinzip läßt sich jedes Signal als eine Überlagerung von reinen Schwingungen darstellen. In der Nachrichtentechnik nennt man dies eine *Frequenzanalyse*.

Die mathematische Theorie dahinter ist die *Fourieranalyse*. Die Umwandung einer Zeitfunktion $f(t)$ in eine Funktion auf dem Frequenzbereich (und zurück) nennt man *Fouriertransformation*.

Die Musik der Primzahlen?

Riemanns geniale Einsicht war, dass man mithilfe der ζ-Funktion eine ‘Frequenzanalyse’ der Primzahlzählfunktion erhält.

Die Musik der Primzahlen?

Riemanns geniale Einsicht war, dass man mithilfe der ζ-Funktion eine 'Frequenzanalyse' der Primzahlzählfunktion erhält. Das Ergebnis vereinfacht sich, wenn man anstelle von $\pi(x)$ die Funktion

$$\psi(x) := \sum_{p^n \leq x} \log(p)$$

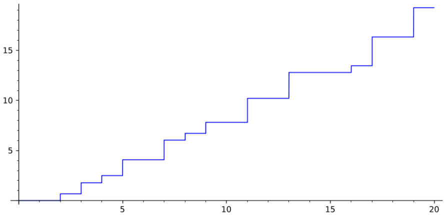
untersucht.

Die Musik der Primzahlen?

Riemanns geniale Einsicht war, dass man mithilfe der ζ-Funktion eine 'Frequenzanalyse' der Primzahlzählfunktion erhält. Das Ergebnis vereinfacht sich, wenn man anstelle von $\pi(x)$ die Funktion

$$\psi(x) := \sum_{p^n \leq x} \log(p)$$

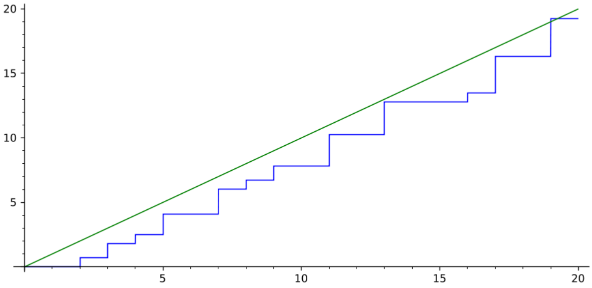
untersucht.



Die Musik der Primzahlen?

Der Primzahlsatz ist äquivalent zu

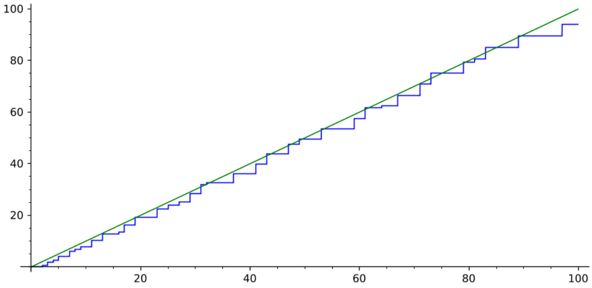
$$\psi(x) \sim x.$$



Die Musik der Primzahlen?

Der Primzahlsatz ist äquivalent zu

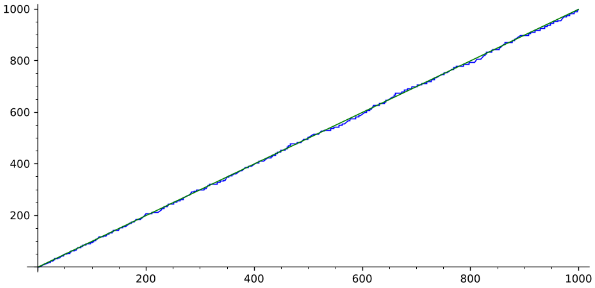
$$\psi(x) \sim x.$$



Die Musik der Primzahlen?

Der Primzahlsatz ist äquivalent zu

$$\psi(x) \sim x.$$



Die Fouriertransformierte von $\psi(x)$

Die 'gedämpfte Fouriertransformierte' von $\psi(x)$ ist die Funktion

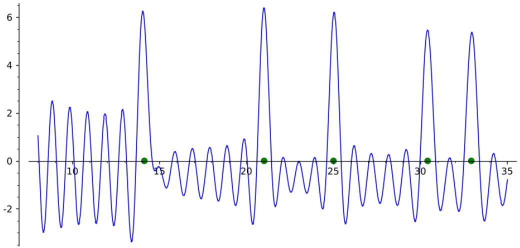
$$F(t) := \sum_{p^n \leq C} \frac{\log(p)}{p^{n/2}} \cdot \cos(n \log(p) \cdot t).$$

Die Fouriertransformierte von $\psi(x)$

Die 'gedämpfte Fouriertransformierte' von $\psi(x)$ ist die Funktion

$$F(t) := \sum_{p^n \leq C} \frac{\log(p)}{p^{n/2}} \cdot \cos(n \log(p) \cdot t).$$

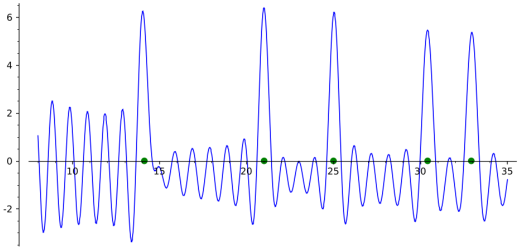
Für $C = 500$ erhalten wir:



Die Fouriertransformierte von $\psi(x)$

Beobachtung: die 'Peaks' sind genau die (positiven Imaginärwerte der) Nullstellen von $\zeta(s)$!

$$\theta = 14.134,\ 21.022,\ 25.010,\ 30.424,\ 32.935, \ldots$$



Von den Nullstellen zu den Primzahlen

Die Riemannsche Vermutung besagt, dass wir die Funktionen $\pi(x)$ und $\psi(x)$ exakt als Überlagerung von reinen Schwingungen mit den Frequenzen θ_i zurückgewinnen können.

Von den Nullstellen zu den Primzahlen

Die Riemannsche Vermutung besagt, dass wir die Funktionen $\pi(x)$ und $\psi(x)$ exakt als Überlagerung von reinen Schwingungen mit den Frequenzen θ_i zurückgewinnen können. Eine vereinfachte Version der 'Rücktransformierten' ist die Funktion

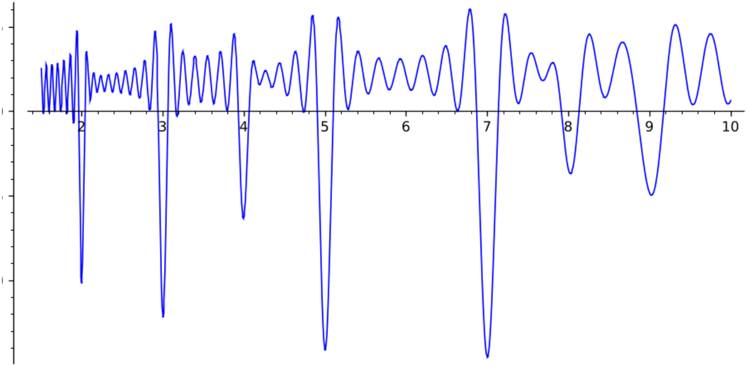
$$H(t) = 1 + \sum_{\theta \leq C} \cos(\theta \cdot t).$$

Von den Nullstellen zu den Primzahlen

Die Riemannsche Vermutung besagt, dass wir die Funktionen $\pi(x)$ und $\psi(x)$ exakt als Überlagerung von reinen Schwingungen mit den Frequenzen θ_i zurückgewinnen können. Eine vereinfachte Version der 'Rücktransformierten' ist die Funktion

$$H(t) = 1 + \sum_{\theta \leq C} \cos(\theta \cdot t).$$

C=50:

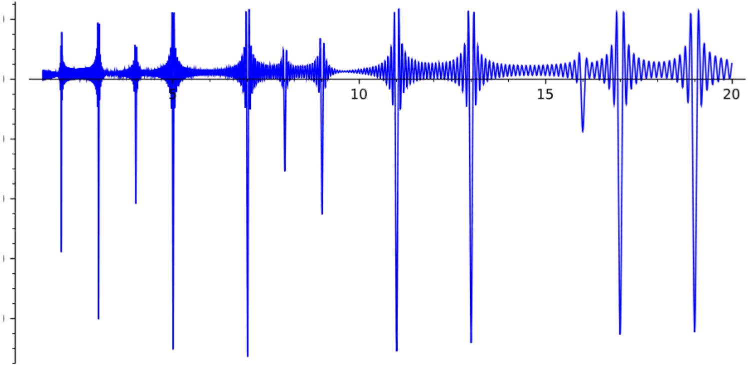


Von den Nullstellen zu den Primzahlen

Eine vereinfachte Version der 'Rücktransformierten' ist die Funktion

$$H(t) = 1 + \sum_{\theta \leq C} \cos(\theta \cdot t).$$

C=500:



Die explizite Formel

Theorem (Riemann-von Mangoldt)

Für alle $x \geq 2$ gilt

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(1 - x^2).$$

Dabei läuft ρ über die nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$.

Die explizite Formel

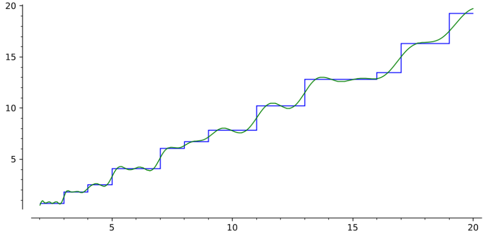
Theorem (Riemann-von Mangoldt)

Für alle $x \geq 2$ gilt

$$\psi_0(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(1 - x^2).$$

Dabei läuft ρ über die nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$.

Mit 10 Nullstellen:



Die explizite Formel

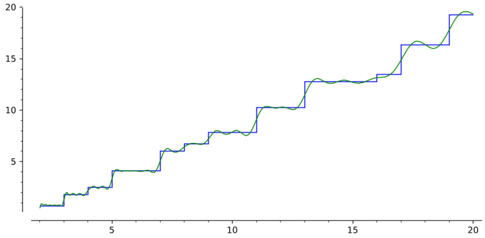
Theorem (Riemann-von Mangoldt)

Für alle $x \geq 2$ gilt

$$\psi_0(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(1 - x^2).$$

Dabei läuft ρ über die nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$.

Mit 20 Nullstellen:



Die explizite Formel

Theorem (Riemann-von Mangoldt)

Für alle $x \geq 2$ gilt

$$\psi_0(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(1 - x^2).$$

Dabei läuft ρ über die nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$.

Mit 100 Nullstellen: