

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Institut für Reine Mathematik

SS 2014 – Blatt 09

Abgabetermin: Freitag, 27.06.2014 um 12:15 Uhr vor Beginn der Übungen

34. Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subset V$ ein affiner Unterraum. Weiterhin sei $W \subset U$ eine nichtleere, relativ offene Teilmenge von U . Zeigen Sie, dass jede lineare Funktion auf V , die auf U nicht konstant ist, auch auf W nicht konstant ist. (4 P)

35. Betrachten Sie das Polytop im $\mathbb{R}^3$ zu den folgenden Punkten:

$$p_0 := (0, 0, 2), \quad q = (0, 0, -2) \quad \text{und den acht Punkten } (\pm 1, \pm 1, \pm 1).$$

- (a) Stellen Sie P als Polyeder in der Form $\{x \in \mathbb{R}^3; \varphi(x) \geq b\}$ dar.
(b) Beschreiben Sie alle k -dimensionalen Facetten für $k = 0, 1, 2$ in der Form

$$\{x \in P; \varphi_{i_1}(x) = b_{i_1}, \dots, \varphi_{i_{3-k}}(x) = b_{i_{3-k}}\}$$

- (c) Beschreiben Sie einen Kantenweg von p_0 nach q mit den Gleichungen aus (b).
(d) Betrachten Sie die Funktion $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x_3$ entlang des Kantenwegs. Sei nun K die Kante $[p_0, p_1]$, wobei $p_1 := (1, 1, 1)$ ist. Nun sei K auch beschrieben durch $(\varphi_2 = b_2, \varphi_3 = b_3)$ und den Endpunkten, die durch $\varphi_0 = b_0$ bzw. durch $\varphi_1 = b_1$ gegeben ist. Stellen Sie ψ und φ_1 in der Basis $\varphi_0, \varphi_2, \varphi_3$ dar; also

$$\psi = c_0\varphi_0 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3$$

$$\varphi_1 = a_{1,0}\varphi_0 + a_{1,2}\varphi_2 + a_{1,3}\varphi_3$$

Es ist $c_0 < 0$ und $a_{1,0} < 0$. Erläutern Sie geometrisch, warum das so sein muss.

- (e) Ist $\varphi_j = a_{j,0}\varphi_0 + a_{j,2}\varphi_2 + a_{j,3}\varphi_3$ eine lineare Funktion mit den Bedingungen $a_{j,0} < 0$ und $\varphi_j(x) \geq b_j$ für alle $x \in P$, so gilt

$$0 > \chi_1 = \frac{\varphi_1(p_0) - b_1}{a_{1,0}} \geq \chi_j = \frac{\varphi_j(p_0) - b_j}{a_{j,0}}$$

- (f) Beschreiben Sie $\psi|_K$ für alle Kanten K des gewählten Kantenweges.

(4+6+2+6+4+4 P)