

# Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Institut für Reine Mathematik

SS 2014 – Blatt 10

---

Abgabetermin: Freitag, 04.07.2014 um 12:15 Uhr vor Beginn der Übungen

---

36. Es sei ein Polyeder  $P \subset \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$P := \{x \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}.$$

Weiterhin seien  $\varphi_1, \dots, \varphi_M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  lineare Funktionen und  $b_1, \dots, b_M \in \mathbb{R}$  gegeben, so dass auch

$$P = \{x \in \mathbb{R}^2; \varphi_1(x) \geq b_1, \dots, \varphi_M(x) \geq b_M\}.$$

gilt. Zeigen Sie:

- (a)  $M \geq 4$
- (b) Zu jeder Seite  $\partial P_j$  von  $P$  existiert eine  $\mu \in \{1, \dots, M\}$ , so dass  $\partial P_j$  eine abgeschlossene Strecke von der affinen Geraden  $\{x \in \mathbb{R}^2; \varphi_\mu(x) = b_\mu\}$  ist.
- (c) Sei etwa  $\varphi_1(x) = x_2 - x_1$  und  $\varphi_2(x) = x_2$ , so definiert  $\varphi_1(x) = -1$  und  $\varphi_2(x) = 0$  eine Ecke von  $P$ .
- (d) Das System  $(\varphi_1, \varphi_2)$  kann nicht die Bedingung  $(*)$  im Satz 9.6.8 erfüllen.
- (e) Man kann das System  $(\varphi_1, \dots, \varphi_M)$  man immer so umnummerieren, dass die Bedingung  $(*)$  im Satz 9.6.8 erfüllt ist.

(2+2+2+2+4 P)

37. Wir betrachten die Linearformen auf  $\mathbb{R}^2$  mit den Koordinaten  $(x, y)$ .

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= x \\ \varphi_2(x, y) &= y \\ \varphi_3(x, y) &= -x + y \\ \varphi_4(x, y) &= x - 4y \\ \varphi_5(x, y) &= -x \\ \psi(x, y) &= -x - y \end{aligned} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Wir wollen  $\psi$  auf dem Polyeder  $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \varphi_i(x, y) \geq b_i \text{ für } i = 1, \dots, 5\}$  mit Hilfe des Simplexverfahrens minimieren.

- (a) Zeichnen Sie das Polyeder. (2 P)
- (b) Berechnen Sie die Ecke, die zu  $\varphi_1 = b_1, \varphi_2 = b_2$  gehört. (2 P)
- (c) Stellen Sie die  $\varphi_i$  und  $\psi$  in der Basis  $(\varphi_1, \varphi_2)$  dar. (3 P)
- (d) Stellen Sie das zugehörige Simplextableau auf. (2 P)
- (e) Wählen Sie  $\nu = 1$  und berechnen Sie die charakteristischen Koeffizienten  $\chi_i$  der  $\varphi_i$ . (1 P)
- (f) Berechnen Sie die Ecke  $q$ , die das Simplexverfahren als nächsten untersuchen wird und aktualisieren Sie ihr Tableau. (3 P)
- (g) Bestimmen Sie das Minimum von  $\psi$  auf  $P$ , indem Sie das Simplexverfahren bis zum Ende durchführen. (3 P)