

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Institut für Reine Mathematik

SS 2014 – Blatt 01

Abgabetermin: Freitag, 02.05.2014 um 12:15 Uhr vor Beginn der Übungen
Bitte zu zweit abgeben!

1. Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ Bilinearformen sind. Falls ja, sind sie symmetrisch und wie sieht ihre beschreibende Matrix bzgl. der Basis $\underline{v} = ((1, 0, 1)^t, (1, 1, 0)^t, (0, 1, 1)^t)$ des $\mathbb{R}^3$ aus?

(a) $f((x_1, x_2, x_3)^t, (y_1, y_2, y_3)^t) := x_1 y_1^2 + y_1 x_1^2 + x_2 y_2$. (2 P)

(b) $f((x_1, x_2, x_3)^t, (y_1, y_2, y_3)^t) := x_1 y_2 + x_2 y_3 - 10 x_3 y_3$. (2 P)

(c) $f((x_1, x_2, x_3)^t, (y_1, y_2, y_3)^t) := x_1 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_2 - 3 x_3 y_2 - 3 x_2 y_3$. (2 P)

(d) $f((x_1, x_2, x_3)^t, (y_1, y_2, y_3)^t) := x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 - y_2^2$. (2 P)

2. Die symmetrische Bilinearform $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ sei bzgl. der kanonischen Basis $\underline{e} := (e_1, e_2, e_3)$ durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Welche Matrix beschreibt f bzgl. der Basis $\underline{v} := ((1, -1, 1)^t, (2, -1, 2)^t, (1, 0, 0)^t)$? (2 P)

(b) Ist $f|_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$? (1 P)

3. Sei $(V; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, daß für alle $x, y \in V$ gilt:

(a) $\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$ (2 P)

(b) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \vartheta$
(verallgemeinerter *Satz von Pythagoras* oder *Cosinussatz*) (2 P)

(c) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (*Parallelogramm-Gleichung*) (2 P)

4. Zeigen Sie, dass der Vektorraum V der beschränkten, stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\sup}$ die Parallelogramm-Gleichung aus (3c) nicht erfüllt. Mithin wird $\|\cdot\|_{\sup}$ nicht durch ein Skalarprodukt auf V induziert. (3 P)

5. Gegeben sei auf $V = \langle 1, X, X^2 \rangle \subset \mathbb{R}[X]$ das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt .$$

(a) Bestimmen Sie die Matrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich der Basis $(1, X, X^2)$. (3 P)

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V . (4 P)

(c) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement des Untervektorraums $\langle 1, x \rangle \subset V$. (2 P)