



Übungsblatt 1

Elliptische Kurven

Die Besprechung erfolgt am Mittwoch, dem 7.5.2014,
um 12:00 Uhr in He18 - E60.

Dieses Blatt soll schriftlich zur Korrektur abgegeben werden.

Aufgabe 1 (Lemma 2.4)

(5+5)

Beweisen Sie Lemma 2.4 aus dem Skript, d.h. zeigen Sie, dass

$$U_i \longrightarrow \mathbb{A}^n$$
$$[x_0 : \dots : x_n] \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

und

$$\mathbb{P}^n \setminus U_i \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$
$$[x_0 : \dots : x_n] \longmapsto [x_0 : \dots : x_{i-1} : x_{i+1} : \dots : x_n]$$

Bijektionen sind. Dabei bezeichne U_i die Menge $\{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n ; x_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$.

Aufgabe 2 (Lemma von Bachet)

(2+2+3+3)

In dieser Aufgabe betrachten wir die affine Kurve E in $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, gegeben durch die Gleichung $f(x, y) := y^2 - x^3 - c = 0$, $c \in \mathbb{C}$.

- (a) Zeigen Sie, dass E glatt ist für alle $c \neq 0$.

Sei ab nun $c \neq 0$.

- (b) Sei $(a, b) \in E(\mathbb{Q})$ mit $b \neq 0$. Sei ferner L die Tangente an E im Punkt (a, b) , also die Linie gegeben durch die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) = 0.$$

Zeigen Sie $L \cap E = \{(a, b), Q\}$ mit $Q \in E(\mathbb{C})$. Berechnen Sie auch die Koordinaten von Q und bemerken Sie $Q \in E(\mathbb{Q})$.

- (c) Sei $c = 1$ und $P = (2, 3)$. Zeigen Sie, dass man durch wiederholtes Anwenden des Verfahrens in (b) lediglich zwei verschiedene Punkte erhält.
- (d) Sei nun $c = -2$. Finden Sie einen Punkt $(x, y) \in E(\mathbb{Q})$ mit Koordinaten nicht in $\mathbb{Z}$.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass man in diesem Fall durch Wiederholen unendlich viele Lösungen erhält.

Bitte wenden!

Aufgabe 3

(3+3+4)

Sei C die projektive Kurve gegeben durch eine der folgenden affinen Gleichungen. Bestimmen Sie jeweils die Punkte im Unendlichen, die singulären Punkte und skizzieren Sie die Menge $C(\mathbb{R}) \cap \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

(a) $3x - 7y + 5 = 0$

(b) $y^2 = x^4$

(c) $x^3 + y^3 = xy - 1$

Bemerkung: Überprüfen Sie auch, ob die Punkte im Unendlichen singulär sind.