ulm university universität uulm

Prof. Dr. Irene Bouw
Christian Steck
Sommersemester 2014

Übungsblatt 4

Elliptische Kurven

Die Besprechung erfolgt am Mittwoch, dem 4.6.2014,
um 12:00 Uhr in He18 - E60.

Aufgabe 1 (*Schnittmultiplizitäten*) (2+3+5+5)

Berechnen Sie in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ jeweils sämtliche Schnittpunkte und die zugehörigen Schnittmultiplizitäten der projektiven Kurven gegeben durch die folgenden affinen Gleichungen f und g. Verwenden Sie dabei die neue Definition der Schnittmultiplizität.

(a) $f = y - x^2, \quad g = y.$

(b) $f = y^2 - x^3 - x^2, \quad g = y.$

(c) $f = (x+1)^2 + y^2 - 1, \quad g = (x-1)^2 + y^2 - 1.$

(d) $f = (x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2, \quad g = (x^2+y^2)^3 - x^2y^2$

Aufgabe 2 (*Uniformisierende Elemente*) (3+3+4+5*)

In $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ betrachten wir die projektive Kurve gegeben durch die affine Gleichung $C : y^2 = x^3 + x$.

(a) Zeigen Sie, dass C glatt ist im Punkt $P = (0,0)$.

(b) Finden Sie ein uniformisierendes Element t_P im Punkt P.

(c) Bestimmen Sie $\nu_P(y)$, $\nu_P(x)$ und $\nu_P(2y^2 - x)$.

(d*) Jedes Element in $K[C]_P$ lässt sich schreiben in der Form $u \cdot t_P^n$ für $u \in K[C]_P^*$ und $n \in \mathbb{N}$. Finden Sie solche Darstellungen für die Elemente x und $2y^2 - x$. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 3 ($\mathbb{P}^1$ *und die Kuspe*) (5+5+5*)

Sei K ein Körper, $V = V(Y^2Z - X^3) \subset \mathbb{P}^2(K)$ die Kuspe und

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{P}^1(K) &\longrightarrow V, \\ [S:T] &\longmapsto [S^2T : S^3 : T^3]. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass Φ eine überall definierte rationale Abbildung ist.

(b) Finden Sie eine rationale Abbildung $\Psi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^1(K)$ derart, dass auf den jeweiligen Definitionsbereichen $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}|_{\mathbb{P}^1}$ und $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}|_V$ gilt.

(c*) Ist Φ ein Isomorphismus?

Bemerkung: Vergleichen Sie diese Aufgabe auch mit Blatt 12 - Aufgabe 1 aus der Vorlesung Algebra im Wintersemester 2013/14.

 (Σ 35+10*)