

Geometrie: Blatt 10

Stefan Wewers

Michael Eskin

Abgabe: 07.07.2014, vor der Übung

Hinweis zur Abgabe der Übungsblätter: Die Übungsaufgaben sind zu **zweit** oder zu **dritt** abzugeben. Einzelabgaben werden nicht korrigiert!

Aufgabe 1 ($3+3+3+3+3$ Punkte)

- (a) Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ paarweise verschiedene Punkte und $z'_1 \in \hat{\mathbb{C}}$.

Zeigen Sie: Falls $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [z'_1, z_2, z_3, z_4]$, dann ist $z_1 = z'_1$.

- (b) Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ paarweise verschiedene Punkte und $\varphi \in M(\hat{\mathbb{C}})$ die Möbius-Transformation mit

$$\varphi(z_1) = z_2, \quad \varphi(z_3) = z_4, \quad \varphi(z_4) = z_3.$$

Zeigen Sie: Dann gilt $\varphi(z_2) = z_1$.

Hinweis: Benutzen Sie (a) und Aufgabe 3 (b) von Blatt 9.

- (c) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ zwei voneinander verschiedene Punkte.

Zeigen Sie: Dann gibt es ein $\varphi \in M(\mathbb{H})$ mit

$$\varphi(z_1) = z_2 \text{ und } \varphi(z_2) = z_1.$$

Hinweis: Betrachten Sie $a, b \in \hat{\mathbb{R}}$ sodass $z_1, z_2 \in g_{a,b}$ und benutzen Sie (b).

- (d) Ist φ aus (c) eindeutig bestimmt? Begründen Sie ihre Antwort!
- (e) Sei $z_1 := 1 + i, z_2 := -1 + i$. Bestimmen Sie φ wie in (c).

Aufgabe 2 ($8+7$ Punkte)

- (a) Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ ein Kreis und $A, B, C, D \in K$ paarweise verschiedene Punkte. Wir nehmen an, dass $ACBD$ ein Viereck bildet (d.h. $\overline{AB}, \overline{CD}$ schneiden sich). Seien $\alpha := \angle A, \beta := \angle B$ die Innenwinkel bei A bzw. B (vgl. Sie die Skizze auf der nächsten Seite für die Notation).

Zeigen Sie:

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

Hinweis: Sei $\mathcal{O}$ der Mittelpunkt von K . Betrachten Sie die Dreiecke $AC\mathcal{O}, CB\mathcal{O}, BD\mathcal{O}, AD\mathcal{O}$. Sie müssen 3 Fälle unterscheiden für die Lage von $\mathcal{O}$!

- (b) Benutzen Sie (a) um eine Richtung von Satz 4.20 aus dem Skript zu zeigen.

Sei K ein Kreis und $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden mit $z_1, z_2, z_3, z_4 \in K$. Dann gilt

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Wir erinnern an die Darstellung von $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ aus Bemerkung 4.18 (ii) (24) im Skript. Schreiben Sie die darin vorkommenden linearen Terme $z_i - z_j$ als Polarkoordinaten und verwenden Sie (a).

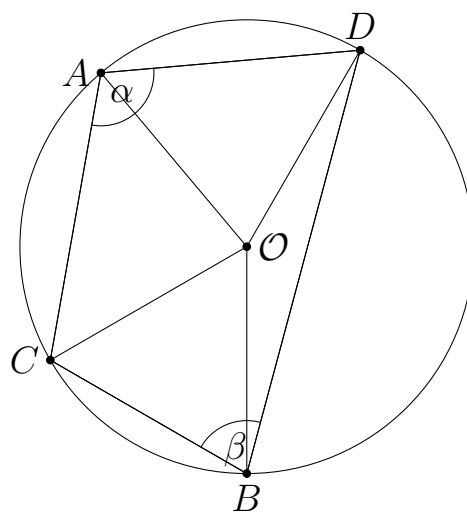


Abbildung 1: Skizze für Aufgabe 3 (a)