Geometrie: Blatt 11

Stefan Wewers
Michael Eskin

Abgabe: 14.07.2014, vor der Übung

Hinweis zur Abgabe der Übungsblätter: Die Übungsaufgaben sind zu **zweit** oder zu **dritt** abzugeben. Einzelabgaben werden nicht korrigiert!

Aufgabe 1 *(3+4+3 Punkte)*
Sind die angegebenen Strecken/Winkel/Dreiecke kongruent? Wenn ja, geben Sie ein $\varphi \in M(\mathbb{H})$ an, welches diese Kongruenz realisiert. Fertigen Sie des Weiteren jeweils eine Skizze an.

(a) Die Strecken $\overline{z_1 z_2}, \overline{w_1 w_2}$ mit $z_1 = i, z_2 = \zeta_6$, und $w_1 = i, w_2 = \zeta_6^2$. Hierbei ist $\zeta_6 := e^{\frac{1}{3}i\pi} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(b) Die Winkel α und β wobei α durch die zwei Strecken $\overline{i\infty}, \overline{i\zeta_6}$ und β durch die zwei Strecken $\overline{(i+1)\zeta_6}, \overline{(i+1)\infty}$ gegeben ist.

(c) Die Dreiecke $z_1 z_2 z_3$ und $z_1 z_2 z_4$, wobei $z_1 = \zeta_6, z_2 = \zeta_6^2, z_3 = 2i, z_4 = \frac{i}{2}$.

Aufgabe 2 *(4+(1+1+2) Punkte)*

(a) Sei $K \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein verallgemeinerter Kreis. Zeigen Sie: es gibt eine Abbildung $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ von der Form
$$\varphi(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \qquad \text{mit} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}),$$
die $\varphi(z) = z$ für alle $z \in K$ erfüllt.

Hinweis: Sei $\psi \in M(\hat{\mathbb{C}})$ eine geeignete Möbius-Transformation. Schreiben Sie $\varphi = \psi \circ \iota \circ \psi^{-1}$.

(b) Bestimmen Sie ein φ wie in (a) für
   (i) $K_0 = \hat{\mathbb{R}}$
   (ii) $K_1 = i\hat{\mathbb{R}}$
   (iii) $K_2 = S^1$.

Aufgabe 3 *(5+4+3 Punkte)*
Sei $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$. Wir definieren $\kappa_K(z) := |z - z_0|^2 - r^2$. Sei a ein Punkt im Äußeren von K (d.h. $|a - z_0| > r$), p und q die zwei Schnittpunkte einer Geraden $L := \{z = a+tu \mid t \in \mathbb{R}\}$ (mit $|u| = 1$) mit dem Kreis K. Sei weiter c einer der Berührpunkte der Tangenten an K durch a (vgl. die Skizze unten).

(a) Zeigen Sie, dass für ein $z \in \mathbb{C}$ folgende zwei Aussagen äquivalent sind:

(i) $z = a + tu \in K \cap L$

(ii) $z = a + tu$ und $t^2 + 2t\Re(\bar{u}(a - z_0)) + \kappa_K(a) = 0$.

(b) Zeigen Sie: $\kappa_K(a) = |q - a||p - a|$.

Hinweis: Verwenden Sie (a) und insbesondere die quadratische Gleichung!

(c) Schlussfolgern Sie: $|c - a|^2 = |q - a||p - a|$.

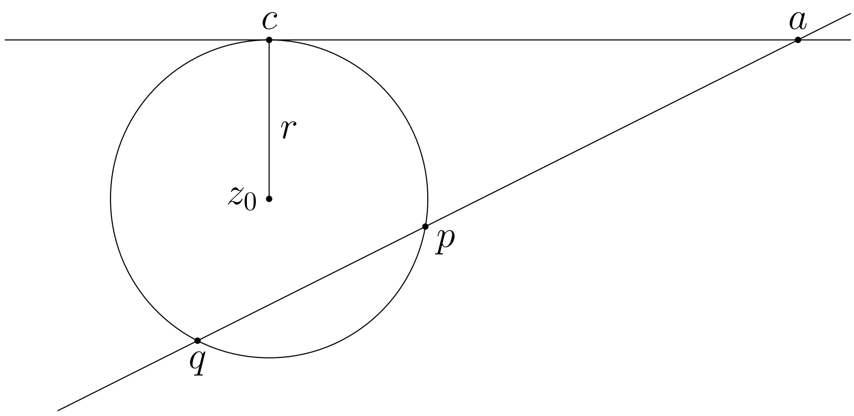

Abbildung 1: Skizze für Aufgabe 3