Geometrie: Bonusblatt 12

Stefan Wewers
Michael Eskin

Abgabe: 21.07.2014, vor der Übung

Hinweis zu Blatt 12: Bearbeiten Sie dieses Blatt nur, wenn Sie weniger als 50% der Übungspunkte haben!

Aufgabe 1 *(4+4 Punkte)*
Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ die Ellipse mit den Brennpunkten $F = (0,0)$, $F' = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ und der numerischen Exzentrizität $\epsilon = 1/2$.

(a) Bestimmen Sie eine Gleichung für E in der Form

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0$$

und skizzieren Sie die Lage von E.

Hinweis: Bezüglich eines geeigneten Koordinatensystems (den Hauptachsen) (y_1, y_2) besitzt E die Gleichung

$$\frac{y_1^2}{4} + y_2^2 = 1. \tag{1}$$

Beschreiben Sie den Koordinatenwechsel $y = \varphi(x) = Sx + v$ (wobei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine geeignete Kongruenzabbildung ist) und substituieren Sie in (1).

(b) Zeigen Sie, dass $P = (0, \sqrt{2}) \in E$ gilt und bestimmen Sie eine Gleichung für die Tangente g an E durch P.

Aufgabe 2 *(4+4+4 Punkte)*

(a) Sei g eine Gerade in der euklidischen Ebene, $F \notin g$ und

$$Q := \left\{ P \in \mathbb{R}^2 : |PF| = d(P, g) \right\}.$$

Zeigen Sie: bezüglich eines geeigneten Koordinatensystems besitzt Q eine Gleichung der Form

$$x_1^2 = 2x_2.$$

Hinweis: Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass g die x_1-Achse ist und F auf der x_2-Achse liegt.

(b) Sei nun

$$Q = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_1^2 = 2x_2 \right\}.$$

Für $P = (y_1, y_2) \in Q$ sei ℓ die Tangente an Q durch P. Bestimmen Sie eine Gleichung für ℓ für $y_1 = 2, y_2 = 2$.

(c) Seien P, ℓ wie in (b) und $F = (0, 0.5)$. Sei α der Winkel der von der Geraden $x_1 = 2$ und $\overrightarrow{P\ell}$ in P eingeschlossen wird und β der Winkel der von $\overrightarrow{PF}$ und $\overrightarrow{P\ell}$ eingeschlossen wird (vgl. Sie die Skizze auf der nächsten Seite). Zeigen Sie die Gleichheit $\alpha = \beta$.

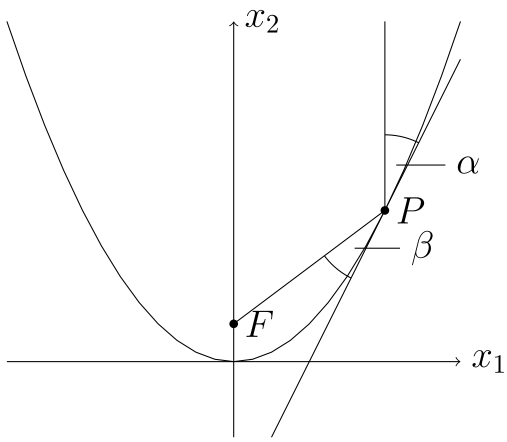

Abbildung 1: Skizze für Aufgabe 2

Aufgabe 3 *(3+3+4 Punkte)*
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und

$$C := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\big\}$$

der Graph von f.

(a) Zeigen Sie, dass C eine glatte Kurve ist und geben Sie eine reguläre Parametrisierung $\gamma : \mathbb{R} \to C$ an.

(b) Sei $f(x) = x^3 - x + 1$ und $P = (1, 1)$. Bestimmen Sie eine Gleichung für die Tangente an C durch P.

(c) Sei nun $f(x) = x^2 - 1$. Skizzieren Sie C und bestimmen Sie die Länge des Kurvenabschnittes zwischen $P = (-1, 0)$ und $Q = (1, 0)$

Hinweis: Benutzen Sie für die Berechnung den Sinus Hyperbolicus. Es sei an Folgendes erinnert:

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1, \quad \cosh(\operatorname{arsinh}(t)) = \sqrt{t^2 + 1}, \quad \sinh'(t) = \cosh(t), \quad \cosh'(t) = \sinh(t).$$