Geometrie: Blatt 3

Stefan Wewers
Michael Eskin

Abgabe: 19.05.2014, vor der Übung

Aufgabe 1 *(3+4+3 Punkte)*
In dieser Aufgabe soll der Höhensatz auf drei verschiedene Arten und Weisen bewiesen werden. Benutzen Sie dabei ausschließlich die angegebenen Sätze und Methoden aus der Aufgabenstellung!

Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck der Höhe h und p, q die Längen der durch das Lot von C auf AB entstandenen Abschnitte (vgl. Abbildung 1). Zeigen Sie auf folgende Arten dass $h^2 = pq$ gilt:

(a) Benutzen Sie den Satz des Pythagoras.

(b) Benutzen Sie den Kongruenzsatz, den Winkelsummensatz und ein Ergänzungsargument (wie im Beweis von Satz 1.2 im Skript).

(c) Benutzen Sie Vektorrechnung.

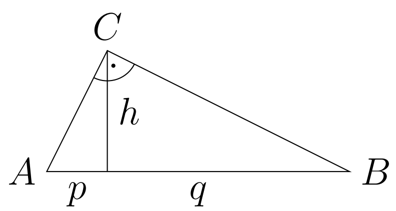

Abbildung 1: Skizze für Aufgabe 1

Aufgabe 2 *(10 Punkte)*
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine *glatte Kurve*, d.h. eine stetige Abbildung die zusätzlich auf (a, b) stetig differenzierbar ist. Die *Länge* von γ ist definiert als

$$\|\gamma\| := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

wobei $\dot{\gamma}$ die totale Ableitung von γ bezeichnet. Sei $\varphi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \xrightarrow{\sim} [a, b]$ ein stetiger, im Inneren stetig differenzierbar Isomorphismus von Intervallen mit $\varphi(\tilde{a}) = a$ und $\varphi(\tilde{b}) = b$. Sei $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: $\|\tilde{\gamma}\| = \|\gamma\|$.

Aufgabe 3 *(6+4 Punkte)*
Beschreiben Sie (in Ihren Worten und mit moderner Terminologie) die Propositionen 5 und 6 und ihren Beweis aus Buch 1 der Elemente von Euklid. Benennen Sie des Weiteren die von Euklid verwendeten Postulate und Axiome.

Anmerkung: Sie finden den Link zu Buch 1 auf der Moodle-Seite der Veranstaltung. Die Propositionen finden Sie unter "I.5" und "I.6".