Geometrie: 1. Klausur

Stefan Wewers
Michael Eskin

Es sind insgesamt 70 Punkte zu vergeben. Zum Bestehen reichen 30 Punkte aus.

Aufgabe 1 *(2+4+3+4 Punkte)*
Sei $\mathbb{H}$ das Halbebenenmodell der hyperbolischen Ebene.

(a) Seien $z_1 := 1 + i, z_2 := 1 + 2i$. Bestimmen Sie die hyperbolische Gerade g, auf der z_1, z_2 liegen und die beiden idealen Punkte a, b (d.h. $a, b \in \hat{\mathbb{R}}$ mit $g = g_{a,b}$).

(b) Bestimmen Sie den hyperbolischen Abstand $d(z_1, z_2)$.

(c) Bestimmen Sie eine Möbius-Transformation φ mit $\varphi(z_1) = z_2$ und $\varphi(z_2) = z_1$.

(d) Bestimmen Sie eine „antiholomorphe Möbius-Transformation" ψ (d.h. eine Abbildung $\psi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ der Form $\psi(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$) sodass $\psi(z) = z$ für alle $z \in g$.

Aufgabe 2 *(4+3+8 Punkte)*
Sei $E = \mathbb{R}$ die euklidische Standardebene.

(a) Sei φ die Kongruenzabbildung $\varphi(x) = Sx + v$, wobei

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Typ (Translation, Drehung, Spiegelung, Gleitspiegelung) sowie die Menge der Fixpunkte von φ.

(b) Geben Sie eine Kongruenzabbildung ψ an, sodass $\tilde{\varphi} := \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ den Ursprung $(0, 0)$ fixiert.

(c) Es seien

$$\begin{array}{lll} A = (1,0) & B = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \text{ sowie} \\ A' = (-1,2) & B' = \left(\frac{1}{2}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) & C' = \left(\frac{1}{2}, 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{array}$$

Sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ kongruent? Geben Sie, falls möglich, zwei verschiedene Kongruenzabbildungen φ_1, φ_2 an, welche diese Kongruenz realisieren. Wie viele mögliche Kongruenzabbildungen gibt es insgesamt?

Bitte wenden!

Aufgabe 3 *(15 Punkte)*
Es sei $(E, \mathcal{G}, \mathcal{Z}, \cong, \simeq)$ eine Hilbertebene. Wir betrachten folgende 3 Szenarien:

(A) Es gelten die Axiome (I),(L),(K),(S) (neutrale Geometrie)

(B) Es gilt zusätzlich zu (A) noch das Parallelenaxiom (P) (euklidische Geometrie)

(C) Es gilt zusätzlich zu (A) noch das hyperbolische Axiom (H) (hyperbolische Geometrie)

Welche der folgenden Aussagen können in den Szenarien (A),(B),(C) bewiesen werden?

(a) Seien K_1, K_2 Kreise, sodass es einen Punkt auf K_1 im Inneren von K_2 und einen Punkt auf K_1 im Äußeren von K_2 gibt. Dann schneiden sich die Kreise K_1 und K_2 in genau zwei Punkten.

(b) Seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte auf einem Kreis K. Dann schneiden sich die Strecken AC und BD in genau einem Punkt.

(c) Seien g_1, g_2 zwei parallele Geraden, ℓ eine Gerade die sowohl g_1 als auch g_2 schneidet und α_1, α_2 Wechselwinkel (Siehe Skizze). Dann gilt $\alpha_1 \simeq \alpha_2$.

(d) Es gibt kein Dreieck sodass die Winkelsumme 180° ist.

(e) Seien ABC und DEF zwei Dreiecke mit $\angle BAC \simeq \angle EDF$, sowie $AC \cong DF$ und $BC \cong EF$. Dann sind die Dreiecke ABC und DEF kongruent.

Sie brauchen keine Begründungen zu geben. Füllen Sie stattdessen einfach eine Tabelle aus mit den Einträgen *Ja* und *Nein*.

	(A)	(B)	(C)
(a)			
(b)			
(c)			
(d)			
(e)			

Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt.

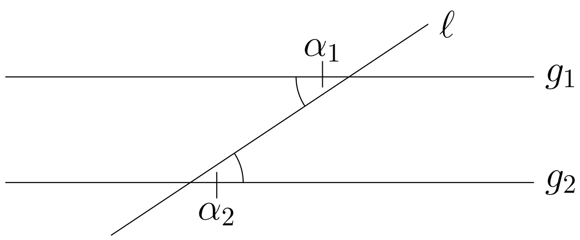

Abbildung 1: Skizze für Aufgabe 3 (c)

Bitte wenden!

Aufgabe 4 *(2+5 Punkte)*
Wir betrachten die parametrisierte Kurve $C \subset \mathbb{R}^3$ mit der Parametrisierung

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (t, \cos(t), \sin(t)).$$

(a) Skizzieren Sie die Lage der Kurve im $\mathbb{R}^3$.

(b) Berechnen Sie die Länge des Kurvenabschnittes $\gamma([0,1])$.

Aufgabe 5 *(3+4+3 Punkte)*
Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ die Lösungsmenge der Gleichung

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0.$$

(a) Skizzieren Sie E (bzgl. des (x_1, x_2)-Koordinatensystems) und zeigen Sie, dass E eine Ellipse ist.

Hinweis: Betrachten Sie einen geeigneten Koordinatenwechsel $x = \varphi(y)$, der E in die Normalform $y_1^2/2 + y_2^2 = 1$ bringt.

(b) Bestimmen Sie die beiden Brennpunkte F, F' von E (in x-Koordinaten!).

(c) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Tangente an E im Punkt $P = (1, 0)$.

Aufgabe 6 *(10 Punkte)*
Wir betrachten eine hilbertsche Ebene E. Sei g eine Gerade, P ein Punkt der nicht auf g liegt. Zeigen Sie: Es gibt eine Gerade ℓ durch P, die senkrecht auf g steht. Benutzen Sie nur die Axiome $(I), (L)$ und (K).

Hinweis: Wählen Sie einen beliebigen Punkt Q in g. Benutzen Sie Q um einen geeigneten Punkt P' mit $\ell = \overleftrightarrow{PP'}$ zu konstruieren.