Geometrie SS 14

Probeklausur

Prof.Dr. Stefan Wewers
Michael Eskin

Es sind insgesamt 70 Punkte zu vergeben. Zum Bestehen würden 30 Punkte ausreichen.

Aufgabe 1 *(2+4+3+4 Punkte)*
Sei $\mathbb{H}$ das Halbebenenmodell der hyperbolischen Ebene und seien $g_1 := \{z \in \mathbb{H} \mid \Re(z) = 0\}$ und $g_2 := \{z \in \mathbb{H} \mid |z-1| = r\}$ hyperbolische Geraden, für ein $r > 0$.

(a) Für welche Werte von r sind g_1 und g_2 parallel?

(b) Geben Sie, falls möglich, in Abhängigkeit von r jeweils eine Möbiustransformation an, welche g_1 auf g_2 abbildet.

(c) Ist die Möbiustransformation in (b) eindeutig? Begründen Sie ihre Antwort!

(d) Bestimmen Sie die Länge der Strecke $\overline{z_1 z_2}$ mit $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ und $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$. (Hinweis: bestimmen Sie zuerst die Gerade $g_{a,b}$, auf der z_1, z_2 liegen, und benutzen Sie die Formel $d(z_1, z_2) = |\log([z_1, z_2, a, b])|$.)

Aufgabe 2 *(15 Punkte)*
Sei $E = \mathbb{R}^2$ die euklidische Standardebene. Sind die angegebenen Strecken/Winkel/Dreiecke kongruent? Wenn ja, geben Sie eine Kongruenzabbildung φ an, welche diese Kongruenz realisiert und bestimmen Sie den Typ von φ. Wenn nein, begründen Sie ihre Antwort!

(a) Die Strecken AB und $A'B'$ mit $A = (0,0), B = (0,2)$ sowie $A' = (1,1), B' = (3,1)$

(b) Die Winkel $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = B'A'C'$ mit $A = A' = (0,0), B = (1,0), C = (1,2), B' = (0,1), C' = (-1,1)$.

(c) Die Dreiecke ABC und $A'B'C$ mit $A = (-5,1), B = (-5,-1), C = (-2,0)$ sowie $A' = (2,0), B' = (4,0), C' = (3,3)$.

Aufgabe 3 *(15 Punkte)*
Es sei $(E, \mathcal{G}, \mathcal{Z}, \cong, \simeq)$ eine Hilbertebene. Wir betrachten folgende 3 Szenarien:

(A) Es gelten die Axiome (I),(L),(K),(S) (neutrale Geometrie)

(B) Es gilt zusätzlich zu (A) noch das Parallelenaxiom (P) (euklidische Geometrie)

(C) Es gilt zusätzlich zu (A) noch das hyperbolische Axiom (H) (hyperbolische Geometrie)

Welche der folgenden Aussagen können in den Szenarien (A),(B),(C) bewiesen werden?

(a) Sei g eine Gerade, $P \notin g$ ein Punkt der nicht auf g liegt. Dann gibt es genau eine Gerade l durch P, die senkrecht auf g steht.

(b) Es gibt ein Dreieck mit Winkelsumme $< 180°$.

(c) Es gibt kein Rechteck (d.h. ein Viereck mit vier rechten Innenwinkeln).

(d) Es gibt eine Metrik d auf E sodass $d(A,B) = d(C,D)$ genau dann, wenn $AB \cong CD$.

(e) Seien $ABC, A'B'C'$ zwei Dreiecke mit Innenwinkeln α, β, γ, bzw. α', β', γ'. Dann sind ABC und $A'B'C'$ kongruent genau dann, wenn $\alpha \simeq \alpha', \beta \simeq \beta', \gamma \simeq \gamma'$.

Sie brauchen keine Begründungen zu geben. Füllen Sie stattdessen einfach eine Tabelle aus, mit den Einträgen *Ja, Nein, weiß nicht.*

	(A)	(B)	(C)
(a)			
(b)			
(c)			
(d)			
(e)			

Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt.

Aufgabe 4 *(2+5 Punkte)*
Sei $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ die Parametrisierung der „logarithmischen Spirale“, d.h.

$$\gamma(t) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t)),$$

und $C := \gamma((0, \infty))$.

(a) Skizzieren Sie C.

(b) Berechnen Sie die Länge von C.

Aufgabe 5 *(5+5 Punkte)*
Sei C in $\mathbb{R}^2$ die Lösungsmenge der Gleichung

$$x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 = 5.$$

(a) Zeigen Sie: C ist eine Hyperbel, d.h. nach einem geeigneten Koordinatenwechsel $x = \varphi(y)$ für eine Kongruenzabbildung φ, erhalten wir eine Gleichung der Form

$$ay_1^2 - by_2^2 = 1,$$

mit $a, b > 0$. Finden Sie φ, a und b!

(b) Sei $P = (2, 1) \in C$. Bestimmen Sie eine Gleichung für die Tangente ℓ an C durch P. Bestimmen Sie alle weiteren Schnittpunkte von ℓ mit C

Aufgabe 6 *(10 Punkte)*
Sei $\mathbb{E}$ eine hilbertsche Ebene (wir setzen die Axiome (I), (L), (K) voraus, aber weder das Stetigkeitsaxiom (S) noch das Parallelenaxiom (P)).

Zeigen Sie das ‘WSW-Kriterium’. Genauer: seien ABC und DEF zwei Dreiecke, so dass $\angle BAC \simeq \angle EDF$, $\angle ABC \simeq \angle DEF$ und $AB \cong DE$ gilt. Dann sind die Dreiecke ABC und DEF kongruent.

Hinweis: Konstruieren Sie zuerst einen Punkt F' auf $\overrightarrow{DF}$ so dass $AC \cong DF'$ und wenden Sie das SWS-Kriterium an.