Geometrie: Blatt 5

Stefan Wewers
Michael Eskin
Abgabe: 2.6., vor der Übung

Aufgabe 1: (4+4 Punkte)
Sei $(\mathbb{E}, \mathcal{G}, \mathcal{Z}, \cong, \simeq)$ eine Hilbertebene und $\mathbb{S} := (\mathbb{E} \times \mathbb{E})/\cong$ die Menge der Äquivalenzklassen der Kongruenzrelation $\cong$. Elemente von $\mathbb{S}$ nennen wir *Streckenlängen*.

(a) Definieren Sie auf der Menge $\mathbb{S}$ eine Verknüpfung $+ : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}$, die unsere Anschauung von 'Addition von Streckenlängen' entspricht. Begründen Sie die Wohldefiniertheit von $+$.

(b) Ist $+$ assoziativ? kommutativ? Gibt es eine neutrales Element? Gibt es zu jedem Element in $\mathbb{S}$ ein Inverses? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung Ihrer Antwort.

Aufgabe 2: (4+4+4 Punkte)
Sei $(\mathbb{E}, \mathcal{G}, \mathcal{Z}, \cong, \simeq)$ eine Hilbertebene, $A, B, C \in \mathbb{E}$ Punkte in allgemeiner Lage und α, β, γ die drei Innenwinkel des Dreiecks $\Delta(A, B, C)$. In dieser Aufgabe sollen Sie die Aussagen (a),(b),(c) beweisen, die den Propositionen 18,19,20 im Buch I der *Elemente* entsprechen. Allgemeine Hinweise:

- Die Addition und die Relation $<$ auf der Menge aller Strecken ergibt sich auf offensichtliche Weise aus den Axiomen (K 1)-(K 3). Siehe Aufgabe 1.
- Die Relation $<$ auf der Menge aller Winkel ist durch die Definition 2.26 im Skript gegeben. Sie dürfen die Proposition 2.27 im Skript benutzen.
- Konsultieren Sie Euklid!

Zeigen Sie:

(a) Aus $AB < AC$ folgt $\gamma < \beta$. (Hinweis: benutzen Sie den Außenwinkelsatz aus der Vorlesung.)

(b) Aus $\gamma < \beta$ folgt $AB < AC$. (Hinweis: benutzen Sie (a) und die Proposition 2.27 im Skript.)

(c) Es gilt $AB + BC > AC$. (Dies ist die *Dreiecksungleichung*.)

Aufgabe 3: (5+5 Punkte)

Sei $\mathbb{E} := \mathbb{R}^2$ die reelle affine Ebene, versehen mit der üblichen euklidischen Geometrie. Beweisen Sie die Gültigkeit von Satz 2.34 (das elementare Stetigkeitsprinzip) für $\mathbb{E}$. Genauer:

(a) Sei $K \subset \mathbb{E}$ ein Kreis, A ein Punkt im Inneren und B ein Punkt im Äußeren von K. Zeigen Sie, dass der Kreis K die Strecke $\overline{AB}$ in genau einem Punkt schneidet. (Hinweis: parametrisieren Sie die Strecke $\overline{AB}$ durch das Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass der Abstand zum Mittelpunkt von K bezüglich dieser Paramatrisierung ein quadratisches Polynom ist.)

(b) Seien $K_1, K_2 \subset \mathbb{E}$ zwei Kreise, wobei K_2 einen Punkt im Inneren und einen Punkt im Äußeren von K_1 besitzt. Zeigen Sie, dass K_1 und K_2 mindestens zwei Schnittpunkte besitzen. (Hinweis: parametrisieren Sie K_2 mithilfe der Sinus- und Cosinusfunktion und gehen Sie sonst wie in (a) vor.)