Geometrie: Blatt 6

Stefan Wewers
Michael Eskin
Abgabe: 10.6., vor der Vorlesung

Aufgabe 1: (9 Punkte)

Zeigen Sie, dass in der neutralen Geometrie (d.h. unter der Annahme der Axiome (I), (L), (K) und (S)) das Parallelenaxiom (P) äquivalent ist zu Euklids fünftem Postulat (vgl. Bemerkung 2.53 im Skript).

Hinweis: beziehen Sie den Wechselwinkelsatz in den Beweis mit ein.

Aufgabe 2: (9 Punkte)

Sei $\mathbb{E}$ eine Hilbertebene, in der auch das Stetigkeitsaxiom gilt (wie in Aufgabe 1). Es seinen A, B, C, D vier Punkte mit $A \neq B$ und $C \neq D$. Beweisen Sie das sogenannte *Archimedische Axiom*: es gibt eine natürliche Zahl n mit

$$n \cdot AB > CD.$$

Hierbei ist $n \cdot AB$ induktiv durch

$$n \cdot AB := \begin{cases} AB, & n = 1, \\ (n-1) \cdot AB + AB, & n > 1. \end{cases}$$

definiert. Die Addition von Streckenlängen und die Relation $>$ sind wie auf dem 5. Übungsblatt definiert.

Hinweis: betrachten Sie die Menge

$$S := \{P \in \overrightarrow{CD} \mid \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot AB > CP\}.$$

Falls $D \notin S$ gilt, so definiert S einen Dedekindschen Schnitt auf der Geraden $g = \overleftrightarrow{CD}$, und das Stetigkeitsaxiom führt zu einem Widerspruch.

Aufgabe 3: (4+4+4 Punkte)

Sind die angegebenen Strecken/Winkel/Dreiecke kongruent? Wenn ja, geben Sie eine explizite Kongruenzabbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ an, in der Form

$$\phi(x) = A \cdot x + v, \qquad A \in O_2(\mathbb{R}),\ v \in \mathbb{R}^2,$$

die die erste Figur (Strecke, Winkel oder Dreieck) auf die zweite Figur abbildet.

(a) Gilt $AB \cong CD$, mit

$$A = (1, 6),\ B = (4, 2),\ C = (4, 1),\ D = (4, 6)?$$

(b) Gilt $\angle ABC \simeq \angle DCA$, mit

$$A = (1, 0),\ B = (0, 0),\ C = (0, 1),\ D = (-1, 0)?$$

(c) Gilt $ABC \cong DCA$, mit A, B, C, D wie in (b)?