Geometrie: Blatt 7

Stefan Wewers
Michael Eskin
Abgabe: 16.6., vor der Übung
korrigierte Version vom 12.6.

Aufgabe 1: (2+2+4+4)
Es sei $\mathbb{E}$ eine Hilbertebene. In dieser Aufgabe soll die Vektorrechnung und die Existenz von Translationen auf $\mathbb{E}$ synthetisch begründet werden (zumindest teilweise). Sie dürfen daher nicht die Isomorphie $\mathbb{E} \cong \mathbb{R}^2$ (Satz 2.54 im Skript) benutzen.

(a) Wir definieren eine Relation $\sim$ auf $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ wie folgt. Es gilt $(A, B) \sim (C, D)$ falls $AB \cong CD$ und zusätzlich entweder $A = B$ und $C = D$ gilt oder $A \neq B$, $C \neq D$, und die Geraden $\overleftrightarrow{AB}$ und $\overleftrightarrow{CD}$ entweder gleich oder parallel sind.

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Wir schreiben $v = \overrightarrow{AB}$ für die $\sim$-Äquivalenzklasse von (A, B) und V für die Menge aller $\sim$-Äquivalenzklassen. Elemente $v \in V$ heißen *Vektoren*. Zeigen Sie: für $v \in V$ und $A \in \mathbb{E}$ gibt es genau einen Punkt $B \in \mathbb{E}$ mit $v = \overrightarrow{AB}$.

(c) Es seien $A, B, C, D \in \mathbb{E}$. Zeigen Sie die Äquivalenz

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

(Hinweis: zeigen Sie, dass das Viereck mit den Ecken $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Benutzen Sie dazu das SWS-Kriterium für kongruente Dreiecke.)

(d) Sei $v \in V$ und $t_v : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ die durch (b) definierte Abbildung (d.h. $t_v(A) = B$ genau dann wenn $v = \overrightarrow{AB}$). Sei g eine Gerade. Dann ist $g' := t_v(g)$ wieder eine Gerade, und es gilt entweder $g = g'$ oder $g \parallel g'$. (Hinweis: wählen Sie zwei verschiedene Punkte $A, B \in g$ und verwenden Sie (c).)

Aufgabe 2: (3+3+4 Punkte) Sei $\mathbb{E} := \mathbb{R}^2$ die euklidische Standardebene.

(a) Bestimmen Sie eine Dilatation $\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, in der Form $\phi(x) = \lambda \cdot c + v$, mit $\phi(-1, 1) = (-1, 3)$ und $\phi(2, 0) = (5, 1)$. Bestimmen Sie den (eindeutigen) Fixpunkt von ϕ.

(b) Bestimmen Sie eine Drehung $\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ um den Punkt $P = (-1, 1)$ mit dem Drehwinkel $\pi/4$ (gegen den Uhrzeigersinn), in der Form $\phi(x) = S \cdot x + v$.

(c) Bestimmen Sie eine Gleitspiegelung $\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, welche die Gerade

$$g = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E} \mid 2x_1 - x_2 = 3\}$$

auf sich selbst abbildet und zusätzlich $\phi(1, -1) = (2, 1)$ erfüllt.

Aufgabe 3: (4+4 Punkte) Sei $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ die Standardebene und g, l zwei verschiedene Geraden durch den Ursprung $O = (0, 0)$.

(a) Seien $A, A' \in g \backslash \{O\}$ und $B, B' \in l \backslash \{O\}$. Zeigen Sie: es gibt eine Dilatation $\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ mit Fixpunkt O und $\phi(A) = A'$, $\phi(B) = B'$ genau dann, wenn die Geraden $\overleftrightarrow{AB}$ und $\overleftrightarrow{A'B'}$ parallel oder gleich sind. (Hinweis: die Dilatation ϕ mit $\phi(O) = O$ hat die Form $\phi(x) = \lambda \cdot x$.)

(b) Seien g, l wie in (a) und $A, A', A'' \in g \backslash \{O\}$, $B, B', B'' \in l \backslash \{O\}$ jeweils paarweise verschiedene Punkte. Beweisen Sie den *Satz von Pappus*: falls $\overleftrightarrow{AB'} \parallel \overleftrightarrow{A'B''}$ und $\overleftrightarrow{A'B} \parallel \overleftrightarrow{A''B'}$ so gilt auch $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A''B''}$. (Hinweis: Benutzen Sie (a). Der Satz von Pappus entspricht der Kommutativität der Multiplikation im Körper $\mathbb{R}$.)