

Kapitel 7

Euklidische und unitäre Vektorräume

7.1 Skalarprodukte

Definition 7.1.1 Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K . Eine Abbildung

$$s : V \times W \longrightarrow K$$

heißt *Bilinearform*, wenn gilt

$$\begin{array}{ll} \text{BF1} & \begin{array}{l} s(v_1 + v_2, w) = s(v_1, w) + s(v_2, w) \quad \forall v, v_1, v_2 \in V; w \in W, \\ s(\lambda v, w) = \lambda s(v, w) \quad \forall \lambda \in K. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{BF2} & \begin{array}{l} s(v, w_1 + w_2) = s(v, w_1) + s(v, w_2) \quad \forall v \in V; w, w_1, w_2 \in W, \\ s(v, \lambda w) = \lambda s(v, w) \quad \forall \lambda \in K. \end{array} \end{array}$$

oder äquivalent:

$$\begin{array}{ll} s(v, _) : W \longrightarrow K & K\text{-linear} \quad \forall v \in V \text{ und} \\ s(_, w) : V \longrightarrow K & K\text{-linear} \quad \forall w \in W. \end{array}$$

Definition 7.1.2 Eine Bilinearform $s : V \times V \rightarrow K$ heißt *symmetrisch*, wenn gilt:

$$\text{SB} \quad s(v_1, v_2) = s(v_2, v_1) \text{ für alle } v_1, v_2 \in V.$$

Für den Fall $K = \mathbb{C}$ definiert man noch

Definition 7.1.3 Es seien V und W Vektorräume über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $\varphi : V \longrightarrow W$ heißt *semilinear*, wenn gilt

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$.
2. $\varphi(\lambda v) = \overline{\lambda} \varphi(v)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}, v \in V$, wobei $\overline{a + ib} = a - ib$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

Definition 7.1.4 Es seien V und W Vektorräume über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $s : V \times W \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Sesquilinearform*, wenn

SF1 $s(_, w) : V \rightarrow \mathbb{C}$ semilinear für alle $w \in W$ ist,

SF2 $s(v, _) : W \rightarrow \mathbb{C}$ linear für alle $v \in V$ ist.

Eine *Sesquilinearform* $s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Hermiteische Form*, wenn

$s(v_1, v_2) = \overline{s(v_2, v_1)}$ für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt.

Definition 7.1.5 Eine Bilinearform bzw. Sesquilinearform $s : V \times W \rightarrow K$ heißt *nichtausgeartet* oder *duale Paarung*, wenn gilt

DP1 $s(v, w) = 0$ für alle $w \in W \implies v = 0$

DP2 $s(v, w) = 0$ für alle $v \in V \implies w = 0$.

Definition 7.1.6 Eine symmetrische Bilinearform $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. eine hermitesche Form $s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *positiv definit*, wenn $s(v, v) > 0$ für alle $v \in V$ mit $v \neq 0$ gilt.

Beachte: Wegen $s(v, v) = \overline{s(v, v)}$ gilt $s(v, v) \in \mathbb{R}$.

Notiz 7.1.7 Ist $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ positiv definit, so ist s nicht ausgeartet.

Definition 7.1.8 Ist V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum oder $\mathbb{C}$ -Vektorraum, so nennt man eine positiv definite, symmetrische Bilinearform bzw. hermitesche Form

$$\begin{aligned} (_, _) : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ (bzw. } \mathbb{C}) \\ (v, w) &\longmapsto (v, w) \end{aligned}$$

ein *Skalarprodukt* in V .

Definition 7.1.9 Ein *euklidischer Vektorraum* ist ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt.

Ein *unitärer Vektorraum* ist ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt.

Beispiel 7.1.10 Einige Beispiele für Skalarprodukte:

$$(a) \quad V = \mathbb{R}^n; \quad (x, y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ kanonisches Skalarprodukt auf } \mathbb{R}^n.$$

$$(b) \quad V = \mathbb{C}^n; \quad (x, y) := \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i \text{ kanonisches Skalarprodukt auf } \mathbb{C}^n.$$

$$(c) \quad V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ stetig}\}; \quad (f, g) := \int_0^1 f(t) g(t) dt \text{ Skalarprodukt auf } V.$$

Definition 7.1.11 Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Für $v \in V$ definieren wir die *Norm des Vektors v* durch

$$|v| = \sqrt{(v, v)} .$$

Notiz 7.1.12 (Parallelogrammgleichung) Für $a, b \in V$ gilt

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2 \cdot |a|^2 + 2 \cdot |b|^2$$

Satz 7.1.13 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Seien $v, w \in V$. Dann gilt

$$|(v, w)| \leq |v| \cdot |w| .$$

Dabei gilt $|(v, w)| = |v| \cdot |w|$ genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis. Für $w = 0$ gilt obige Beziehung mit dem Gleichheitszeichen. Sei also $w \neq 0$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq (v - \lambda w, v - \lambda w) = (v, v) - \lambda(v, w) - \bar{\lambda}(w, v) + \lambda\bar{\lambda}(w, w) \\ &= (v, v) - \lambda(v, w) - \bar{\lambda}\overline{(v, w)} + \lambda\bar{\lambda}(w, w) . \end{aligned}$$

Nun setzt man $\lambda = \overline{(v, w)}/(w, w)$. Dann folgt, nachdem man mit (w, w) multipliziert hat:

$$0 \leq (v, v)(w, w) - (v, w)\overline{(v, w)} - \underbrace{\overline{(v, w)} \overline{(v, w)} + \overline{(v, w)} \overline{(v, w)}}_{=0} .$$

Also gilt $|(v, w)|^2 \leq (v, v) \cdot (w, w)$.

Wegen der Monotonie von $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ folgt daraus $|(v, w)| \leq |v| |w|$.

Ist $w = 0$, so gilt offenbar Gleichheit. Ist $v = \lambda w$ für ein $\lambda \in K$, so gilt

$$|(w, \lambda w)| = |\lambda| \cdot (w, w) = |\lambda| \cdot |w| \cdot |w| = |\lambda w| \cdot |w| = |v| \cdot |w| ,$$

also gilt ebenfalls Gleichheit.

Ist umgekehrt $|(v, w)|^2 = (v, v) \cdot (w, w)$, so gilt nach obiger Rechnung

$$0 = (v - \lambda w, v - \lambda w) \quad \text{für } \lambda = \frac{\overline{(v, w)}}{(w, w)} .$$

Da $(_, _)$ positiv definit ist, folgt $v = \lambda w$. □

Bemerkung 7.1.14 Seien $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\left(\int_0^1 f(t) g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right) \cdot \left(\int_0^1 g(t)^2 dt \right) .$$

Definition 7.1.15 Eine Abbildung $|\cdot| : V \rightarrow \mathbb{R}$ eines $\mathbb{R}$ - bzw. $\mathbb{C}$ -Vektorraums V gegen $\mathbb{R}$ heißt *Norm* auf V , falls für alle $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $|\lambda v| = |\lambda| \cdot |v|$
2. $|v + w| \leq |v| + |w|$ (Dreiecksungleichung)
3. $|v| = 0 \iff v = 0$

Bemerkung 7.1.16 Es gilt stets $|v| \geq 0$.

Beweis. $0 = |0| = |v - v| \leq |v| + |-v| = |v| + |v| = 2 \cdot |v|$

Definition 7.1.17 Ein Vektorraum mit einer Norm heißt *normierter Vektorraum*. Die nichtnegative reelle Zahl $|v|$ heißt *Norm des Vektors* v .

Satz 7.1.18 Sei V ein euklidischer Vektorraum bzw. unitärer Vektorraum. Dann wird durch $|v| := \sqrt{(v, v)}$ eine Norm auf V erklärt.

Beweis. 1. $|\lambda v| = \sqrt{(\lambda v, \lambda v)} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \cdot (v, v)} = |\lambda| \cdot |v|$.

2. Es gilt

$$\begin{aligned} |v + w|^2 &= (v + w, v + w) = (v, v) + (v, w) + \overline{(v, w)} + (w, w) \\ &= |v|^2 + 2 \operatorname{Re}(v, w) + |w|^2 \\ &\leq |v|^2 + 2 \cdot |(v, w)| + |w|^2 && \text{wegen } \operatorname{Re} z \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C} \\ &\leq |v|^2 + 2 \cdot |v| \cdot |w| + |w|^2 && \text{nach Satz 7.1.13} \\ &= (|v| + |w|)^2. \end{aligned}$$

3. $|v| = 0 \iff (v, v) = 0 \iff v = 0$ wegen der Positivdefinitheit. □

Bemerkung 7.1.19 In einem normierten Vektorraum definiert man den *Abstand*

$$d(x, y) = |x - y| \quad \forall x, y \in V.$$

Das ist eine Metrik und damit kann man Konvergenz von Folgen definieren:

$$x_n \rightarrow x \iff d(x_n, x) \rightarrow 0$$

Resumee. Betrachtet man $\mathbb{R}^3$ versehen mit der euklidischen Längenmessung und der üblichen Winkelmessung, so ist

$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cos(\angle(x, y)) \quad \text{ein Skalarprodukt im } \mathbb{R}^3.$$

Umgekehrt wird in einem euklidischen Vektorraum durch

$$|x| = \sqrt{(x, x)}$$

Längenmessung und durch

$$\cos(\angle(x, y)) = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$

eine Winkelmessung eingeführt. Diese Definition ist wegen

$$(x, x) \geq 0 \quad \text{und} \quad -1 \leq \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \leq 1$$

sinnvoll. Diese Größen erfüllen alle Bedingungen, die man von einer solchen Messung erwartet.

7.2 Matrixdarstellung von Bilinearformen

Wie kann man symmetrische Bilinearformen im $\mathbb{R}^n$ bzw. hermitesche Formen im $\mathbb{C}^n$ erklären?

Definition 7.2.1 Eine quadratische Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ heißt *symmetrisch*, wenn $A = A^t$ gilt.

Eine quadratische Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ heißt *hermitesch*, wenn $A = \overline{A}^t$, d.h. wenn $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt.

Beispiel 7.2.2 Einige Beispiele für symmetrische bzw. hermitesche Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \text{ ist symmetrisch.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{C}) \text{ ist hermitesch.}$$

Bemerkung 7.2.3 Die symmetrischen Matrizen $\{A \in M(n \times n, \mathbb{R}); A = A^t\}$ bilden einen $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Die hermiteschen Matrizen $\{A \in M(n \times n, \mathbb{C}); A = \overline{A}^t\}$ bilden einen $\mathbb{R}$ -Vektorraum, aber keinen $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Seine reelle Dimension ist $n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2$.

Notiz 7.2.4 Schreibt man n -Tupel als Spaltenvektoren, so gilt:

(a) Für $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ist durch $s(x, y) = x^t A y$ eine Bilinearform definiert. Die Bilinearform s ist symmetrisch genau dann, wenn $A = A^t$ gilt.

(b) Für $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ durch $s(x, y) = \overline{x}^t A y$ ist eine Sesquilinearform definiert. Die Sesquilinearform s ist hermitesch genau dann, wenn $A = \overline{A}^t$ gilt.

Natürlich werden dadurch i.a. keine positiv definiten Formen erklärt, auch dann nicht, wenn $\det A > 0$ ist.

Beweis. (b) Zunächst gilt $s(x, y) = \bar{x}^t A y$ und $\overline{s(y, x)} = y^t \bar{A} \bar{x} = \bar{x}^t \bar{A}^t y$. Also gilt $s(x, y) = \overline{s(y, x)}$ für alle x, y genau dann, wenn $A = \bar{A}^t$ gilt.

Es soll nun gezeigt werden, dass jede Bilinearform von diesem Typ ist.

Definition 7.2.5 Sei V ein K -Vektorraum, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von V und $s : V \times V \rightarrow K$ eine Bilinearform (bzw. Sesquilinearform). Die s bzgl. $\underline{e}$ darstellende Matrix ist definiert durch

$${}^{\underline{e}}M(s) = (a_{ij}) \in M(n \times n, K) \quad \text{wobei} \quad a_{ij} = s(e_i, e_j) \quad .$$

Notiz 7.2.6 Ist $x = \sum x_i e_i$ und $y = \sum y_i e_i \in V$, so gilt

$$\begin{aligned} s(x, y) &= (x_1, \dots, x_n) {}^{\underline{e}}M(s) (y_1, \dots, y_n)^t \quad \text{falls } s \text{ Bilinearform bzw.} \\ s(x, y) &= (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) {}^{\underline{e}}M(s) (y_1, \dots, y_n)^t \quad \text{falls } s \text{ Sesquilinearform ist.} \end{aligned}$$

Beweis. Es ist $s(x, y) = s(\sum x_i e_i, \sum y_j e_j) = \sum_{i,j} \bar{x}_i y_j s(e_i, e_j)$. □

Definition 7.2.7 Für einen K -Vektorraum V setzt man

$$\begin{aligned} L^2(V, K) &= \{s : V \times V \rightarrow K \text{ bilinear}\} && K\text{-Vektorraum} \\ L^{1\frac{1}{2}}(V, K) &= \{s : V \times V \rightarrow \mathbb{C} \text{ sesquilinear}\} && \mathbb{C}\text{-Vektorraum.} \end{aligned}$$

Satz 7.2.8 Es sei V ein K -Vektorraum mit Basis $\underline{e}$ und $\dim V = n$.

(1) Man hat einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} L^2(V, K) &\xrightarrow{\sim} M(n \times n, K) \\ s &\longmapsto {}^{\underline{e}}M(s) = (s(e_i, e_j)) \quad . \end{aligned}$$

Die symmetrischen Bilinearformen entsprechen dabei den symmetrischen Matrizen.

(2) Man hat einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} L^{1\frac{1}{2}}(V, \mathbb{C}) &\xrightarrow{\sim} M(n \times n, \mathbb{C}) \\ s &\longmapsto {}^{\underline{e}}M(s) = (s(e_i, e_j)) \quad . \end{aligned}$$

Die hermiteschen Formen entsprechen dabei den hermiteschen Matrizen.

Beweis. Es sei $B \in M(n \times n, K)$. Für $x = \sum x_i e_i$ und $y = \sum y_j e_j$ setzt man

$$s_B(x, y) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \cdot B \cdot (y_1, \dots, y_n)^t = \sum_{i,j} \bar{x}_i b_{ij} y_j \quad .$$

Dann ist $s_B \in L^2(V, K)$ bzw. $\in L^{1\frac{1}{2}}(V, \mathbb{C})$. Weiter ist $s_B(e_i, e_j) = b_{ij}$, wenn $B = (b_{i,j})$ gilt.

Umgekehrt gilt für $B := {}^{\underline{e}}M(s)$ offenbar $s = s_B$ nach Notiz 7.2.6. Daher sind ${}^{\underline{e}}M(_)$ und $s_{_}$ invers zueinander. Also sind die obigen Abbildungen bijektiv. Die Linearität ist klar! Die Korrespondenz bzgl. der symmetrischen bzw. hermiteschen Formen und Matrizen ist klar nach Notiz 7.2.4. $\square$

Satz 7.2.9 *Es sei V ein K -Vektorraum mit $\dim V = n$ und es sei s eine Bilinearform bzw. Sesquilinearform auf V . Sind $\underline{e}$ und $\underline{e}'$ Basen von V , so gilt mit der Transformationsmatrix $S = {}^{\underline{e}'}_{\underline{e}}M(\text{id}_V)$:*

$${}^{\underline{e}'}M(s) = \overline{S}^t \cdot {}^{\underline{e}}M(s) \cdot S,$$

wobei die Konjugation $\bar{}$ nur im sesquilinearen Fall steht.

Beweis. Sei $S = (a_{ij})$, also $e'_j = \sum_i a_{ij} e_i$. Dann gilt

$$s(e'_i, e'_j) = s\left(\sum_k a_{ki} e_k, \sum_l a_{lj} e_l\right) = \sum_{k,l} \overline{a_{ki}} a_{lj} s(e_k, e_l),$$

also $(s(e'_i, e'_j)) = (\overline{a_{ki}})^t \cdot (s(e_k, e_l)) \cdot (a_{lj})$. Daher gilt ${}^{\underline{e}'}M(s) = \overline{S}^t \cdot {}^{\underline{e}}M(s) \cdot S$. $\square$

Definition 7.2.10 Ist $s : V \times V \rightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform bzw. hermitesche Form, so heißt die Abbildung

$$q_s : V \longrightarrow K, \quad v \longmapsto q_s(v) := s(v, v)$$

die zugeordnete quadratische Form.

Bemerkung 7.2.11 Ist $v \in V$ und $\lambda \in K$, so gilt

$$q_s(\lambda v) = \overline{\lambda} \lambda q_s(v) = |\lambda|^2 q_s(v).$$

Bemerkung 7.2.12 Man kann eine symmetrische Bilinearform bzw. hermitesche Form s aus der zugeordneten quadratischen Form rekonstruieren vermöge

$$s(v, w) = \frac{1}{4} (q_s(v+w) - q_s(v-w)) \quad \text{im Fall } K = \mathbb{R} \text{ bzw.}$$

$$s(v, w) = \frac{1}{4} (q_s(v+w) - q_s(v-w) + iq_s(v-iw) - iq_s(v+iw)) \quad \text{im Fall } K = \mathbb{C}.$$

7.3 Orthogonalität

In diesem Abschnitt sei $(V, (_, _))$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum.

Definition 7.3.1 Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen *orthogonal*, wenn $(x, y) = 0$ gilt. Man schreibt $x \perp y$.

Bemerkung 7.3.2 Wir hatten schon die Winkelmessung eingeführt durch

$$\cos(\angle(x, y)) = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \quad (\text{nach Satz 7.1.13 gilt : } -1 \leq \cos(\angle(x, y)) \leq +1) .$$

Nun gilt

$$1. \quad x \perp y \iff \cos(\angle(x, y)) = 0 \iff \angle(x, y) = \pm\pi/2 .$$

$$2. \quad \text{Falls } x \perp y, \text{ gilt } |x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 \quad (\text{Satz von Pythagoras})$$

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = |x|^2 + |y|^2 .$$

$$3. \quad |x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2 \cdot |x| \cdot |y| \cdot \cos(\angle(x, y)) \quad (\text{Cosinus-Satz}).$$

Das ist hier wegen der Definition trivial !

Definition 7.3.3 Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren in V heißt

1. *orthogonal*, wenn $v_i \perp v_j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt.
2. *orthonormal*, wenn sie orthogonal ist und $|v_i| = 1$ für alle $i \in I$ gilt.
3. *Orthonormalbasis*, wenn sie orthonormal und Basis ist.

Notiz 7.3.4 Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine orthogonale Familie in V mit $0 \neq v_i$ für alle $i \in I$, so gilt

1. $(v_i/|v_i|)_{i \in I}$ ist eine orthonormale Familie in V .
2. $(v_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig.

Beweis. Es gilt

$$\left(\frac{v_i}{|v_i|}, \frac{v_j}{|v_j|} \right) = \frac{1}{|v_i| \cdot |v_j|} \cdot (v_i, v_j) = \frac{(v_i, v_i)}{|v_i| \cdot |v_i|} \cdot \delta_{ij} = \delta_{ij} .$$

Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ und $i_1, \dots, i_n \in I$ paarweise verschiedene Indizes mit

$$0 = \lambda_1 v_{i_1} + \dots + \lambda_n v_{i_n}$$

gegeben. Dann gilt für $\mu = 1, \dots, n$

$$0 = \left(\sum_{\nu} \lambda_{\nu} v_{i_{\nu}}, v_{i_{\mu}} \right) = \sum_{\nu} \bar{\lambda}_{\nu} (v_{i_{\nu}}, v_{i_{\mu}}) = \bar{\lambda}_{\mu} \cdot |v_{i_{\mu}}|^2 .$$

Also folgt $\lambda_{\mu} = 0$ wegen $v_{i_{\mu}} \neq 0$. □

Satz 7.3.5 (Orthonormierungssatz) *Es sei V ein endlich dimensionaler, euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und W ein Untervektorraum von V . Dann lässt sich jede Orthonormalbasis $(w_1, \dots, w_m)$ von W zu einer Orthonormalbasis $(w_1, \dots, w_n)$ von V ergänzen.*

Beweis. Konstruktives Verfahren nach E. Schmidt. Ist $V = W$, so ist nichts zu zeigen. Sonst gibt es $v \in V - W$. Setze nun

$$w := \overline{(v, w_1)}w_1 + \dots + \overline{(v, w_m)}w_m.$$

Dann gilt für $k = 1, \dots, m$

$$(w, w_k) = \overline{(v, w_1)}(w_1, w_k) + \dots + \overline{(v, w_m)}(w_m, w_k) = (v, w_k)$$

wegen $(w_l, w_k) = \delta_{lk}$. Setze man nun $\tilde{w}_{m+1} := w - v$, so gilt

$$(\tilde{w}_{m+1}, w_k) = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, m.$$

Wegen $w \in W$ und $v \notin W$ ist $\tilde{w}_{m+1} \notin W$. Dann ist mit

$$w_{m+1} := \frac{1}{|\tilde{w}_{m+1}|} \cdot \tilde{w}_{m+1}$$

$(w_1, \dots, w_{m+1})$ eine orthonormale Familie. Nach der vorangegangenen Notiz gilt

$$\dim(W + K w_{m+1}) = m + 1.$$

Dieses Verfahren liefert nach $(\dim V - \dim W)$ Schritten die gesuchte Basis, wobei man im $(j+1)$ -ten Schritt W durch

$$\widetilde{W} = W + K w_{m+1} + \dots + K w_{m+j}$$

zu ersetzen hat. □

Korollar 7.3.6 *Jeder endlich-dimensionale euklidische bzw. unitäre Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis.*

Beweis. Das folgt aus Satz 7.3.5 mit $W = (0)$. □

Notiz 7.3.7 Es sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von V . Dann sind äquivalent:

- (a) $(e_1, \dots, e_n)$ ist eine Orthonormalbasis.
- (b) $(x, y) = \sum_i \bar{x}_i y_i$ für alle $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum x_i e_i$

Beweis. Es ist $(x, y) = \sum_{i,j} \bar{x}_i y_j (e_i, e_j)$. Also gilt

$$\begin{aligned} (x, y) = \sum_i \bar{x}_i y_i \quad \forall x, y \in V &\iff (e_i, e_j) = \delta_{i,j} \quad \forall i, j \\ &\iff (e_1, \dots, e_n) \text{ Orthonormalbasis.} \end{aligned} \quad \square$$

Definition 7.3.8 Zwei euklidische bzw. unitäre Vektorräume heißen *isometrisch*, wenn es einen Isomorphismus

$$\varphi : V \rightarrow V' \text{ mit } (x, y) = (\varphi x, \varphi y) \text{ für alle } x, y \in V$$

gibt. Man bezeichnet φ als *Isometrie*.

Bemerkung 7.3.9 Ist φ Isometrie so ist auch φ^{-1} Isometrie.

Beweis. Für $\varphi x = \tilde{x}$, $\varphi y = \tilde{y}$ gilt: $(\varphi^{-1}\tilde{x}, \varphi^{-1}\tilde{y}) = (x, y) = (\varphi x, \varphi y) = (\tilde{x}, \tilde{y})$. $\square$

Satz 7.3.10 Es seien V und V' euklidische bzw. unitäre endlich dimensionale Vektorräume. Genau dann ist V isometrisch zu V' , wenn $\dim V = \dim V'$ gilt.

Beweis. “ $\rightarrow$ ” trivial.

“ $\leftarrow$ ” Nach Korollar 7.3.6 gibt es Orthonormalbasen $(e_1, \dots, e_n)$ von V bzw. $(e'_1, \dots, e'_n)$ von V' . Dann wird durch $\varphi(e_i) = e'_i$ für $i = 1, \dots, n$ ein Isomorphismus $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V'$ definiert. φ ist eine Isometrie. Ist nämlich $x = \sum x_i e_i$ und $y = \sum y_i e_i$, so folgt dann $\varphi(x) = \sum x_i e'_i$, $\varphi(y) = \sum y_i e'_i$. Also gilt

$$(x, y) = \sum \bar{x}_i y_i = (\varphi x, \varphi y) \quad ;$$

weil $\underline{e}$ bzw. $\underline{e}'$ Orthonormalbasen sind. $\square$

Korollar 7.3.11 Es gibt bis auf Isomorphie nur einen euklidischen bzw. unitären Vektorraum der Dimension n und dieser ist isometrisch zu $\mathbb{R}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt $(x, y) = \sum x_i y_i$ bzw. $\mathbb{C}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt $(x, y) = \sum \bar{x}_i y_i$.

Definition 7.3.12 Es sei V ein endlich dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Sei $M \subset V$ eine Teilmenge. Dann heißt

$$M^\perp := \{v \in V ; (m, v) = 0 \text{ für alle } m \in M\}$$

der *Orthogonalraum* zu M .

Notiz 7.3.13 $M^\perp$ ist Untervektorraum von V .

Beweis. $0 \in M^\perp$. Weiterhin gilt für $\lambda \in K$ und $v, w \in M^\perp$

$$(m, \lambda v + w) = \lambda \underbrace{(m, v)}_{=0} + \underbrace{(m, w)}_{=0} = 0$$

für alle $m \in M$. Also gilt $\lambda v + w \in M^\perp$. $\square$

Definition 7.3.14 V ist *orthogonale Summe* der Untervektorräume $V_1, \dots, V_r$, wenn gilt

1. $V = V_1 + \dots + V_r$
2. $(v_i, v_j) = 0$ für alle $v_i \in V_i, v_j \in V_j$ für alle $i \neq j$.

Man schreibt $V = V_1 \perp \dots \perp V_r$.

Ist $V = U \perp W$, so heißt W *orthogonales Komplement* zu U .

Notiz 7.3.15 (a) Ist $V = V_1 \perp \dots \perp V_r$, so ist $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$.

(b) Das orthogonale Komplement (falls es existiert), ist eindeutig bestimmt.

Ist also $V = U \perp W$, so gilt $W = U^\perp$.

Beweis. (a) Jedes $v \in V$ hat eine Darstellung $v = v_1 + \dots + v_r$. Hat man eine weitere Darstellung $v = v'_1 + \dots + v'_r$, so gilt

$$0 = v - v = (v_1 - v'_1) + \dots + (v_r - v'_r).$$

Setzt man $w_i := v_i - v'_i$, so gilt $w_i \perp w_j$ für alle $i \neq j$. Dann folgt

$$0 = (0, w_j) = \left(\sum_i w_i, w_j \right) = \sum_i (w_i, w_j) = (w_j, w_j) \text{ für alle } j.$$

Also $w_j = 0$ für alle j und somit $v_j = v'_j$ für alle j .

(b) Sei $V = U \perp W$. Nun ist $W \subset U^\perp$ nach Definition von $U^\perp$. Jedes $v \in V$ hat eine Darstellung $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$. Ist $v \in U^\perp$, so gilt wegen $w \in W \subset U^\perp$

$$0 = (v, u) = (u, u) + (w, u) = (u, u).$$

Es gilt $(w, u) = 0$ wegen $w \in W \subset U^\perp$. Also gilt $u = 0$, somit $U^\perp \subset W$. Insgesamt folgt $W = U^\perp$. $\square$

Satz 7.3.16 Es sei V ein endlich dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Weiter sei $W \subset V$ ein Untervektorraum von V . Dann gilt

$$V = W \perp W^\perp \text{ und } W = (W^\perp)^\perp.$$

Beweis. Nach Satz 7.3.5 kann man eine Orthonormalbasis $(w_1, \dots, w_m)$ von W zu einer Orthonormalbasis $(w_1, \dots, w_n)$ von V ergänzen. Setzt man $U = \langle w_{m+1}, \dots, w_n \rangle$, so gilt $V = W \perp U$. Nach Notiz 7.3.15 folgt $U = W^\perp$. Ebenso gilt

$$V = W^\perp \perp (W^\perp)^\perp.$$

Also $W = W^{\perp\perp}$ nach Notiz 7.3.15. $\square$

Korollar 7.3.17 Für eine Teilmenge $M \subset V$ gilt $\langle M \rangle = M^{\perp\perp}$

Beweis. Offenbar gilt $\langle M \rangle^\perp = M^\perp$ $\square$

Korollar 7.3.18 Ist $W \subset V$ ein Untervektorraum, so existiert genau eine lineare Abbildung $p_W : V \rightarrow W$ mit $p_W|_W = \text{id}_W$ und $\text{Ker}(p_W) = W^\perp$.

Die Abbildung p_W heißt Orthogonalprojektion auf W . Es gilt

$$p_W(w + w_\perp) = w \text{ für } w \in W, w_\perp \in W^\perp.$$

Beweis. Jedes $v \in V$ hat genau eine Darstellung $v = w + w_\perp$ mit $w \in W$ und $w_\perp \in W^\perp$. Also ist $p_W(v) = w$ wohldefiniert und offenbar linear. Weiterhin gilt

$$(*) \quad p_W|_W = \text{id}_W, \quad \text{Ker}(p_W) = W^\perp.$$

Wegen $V = W \oplus W^\perp$ ist p_W durch (*) eindeutig bestimmt. $\square$

Für allgemeine Projektionen gilt folgende Charakterisierung:

Lemma 7.3.19 Sei V ein K -Vektorraum. Seien U, W Untervektorräume von V . Dann sind äquivalent:

- (1) $V = U \oplus W$
- (2) Es gibt $p : V \rightarrow V$ linear mit $p = p^2$, $\text{Ker}(p) = W$, $\text{Ker}(\text{id}_V - p) = U$.
- (3) Es gibt $p : V \rightarrow V$ linear mit $p = p^2$, $\text{Ker}(p) = W$, $\text{Bi}(p) = U$.
- (4) Es gibt $p, q : V \rightarrow V$ linear mit $U = \text{Bi}(p)$, $W = \text{Bi}(q)$, $pq = qp = 0$ und $\text{id}_V = p + q$.

Beweis. 1 $\rightarrow$ 2. Setze $p(u + w) = u$ für $u \in U$ und $w \in W$. Das ist wohldefiniert!
 2 $\rightarrow$ 3. Die Inklusion $\text{Ker}(\text{id}_V - p) \subset \text{Bi}(p)$ ist trivial wegen $x = p(x)$ für $x \in \text{Ker}(\text{id}_V - p)$. Die Umkehrung folgt wegen $p = p^2$. Es gilt nämlich $p(x) = p^2(x)$; also $(\text{id}_V - p) \circ p(x) = 0$. Daher gilt die umgekehrte Inklusion $\text{Bi}(p) \subset \text{Ker}(\text{id}_V - p)$.
 3 $\rightarrow$ 4. Setze $q := \text{id}_V - p$. Wie oben zeigt man $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(\text{id}_V - q) = \text{Bi}(q)$, weil $q^2 = \text{id}_V - p - p + p^2 = \text{id}_V - p = q$ gilt. Also ist $W = \text{Bi}(q)$. Offenbar gilt $qp = p - p^2 = 0$, $qp = pq = 0$ und $\text{id}_V = p + q$.
 4 $\rightarrow$ 1. Wegen $\text{id}_V = p + q$ gilt $v = p(v) + q(v)$; also $V = U + W$. Ist $v \in U \cap W$, so gilt $v = p(v_1) = q(v_2)$. Weiterhin gilt $v = p(v) + q(v)$. Indem man nun dort $v = p(v_1) = q(v_2)$ einsetzt und $pq = qp = 0$ ausnutzt, folgt $v = p(q(v_1)) + q(p(v_2)) = 0 + 0 = 0$. $\square$

7.4 Determinantenkriterium für Definitheit

Man kann die Positivdefinitheit einer hermiteschen Form, die etwa durch eine hermitesch symmetrische Matrix $B \in M(n, \mathbb{C})$ gegeben ist, über die Positivität ihrer Hauptdiagonalunterdeterminanten testen. Ist etwa $B = (b_{ij}) \in M(n, \mathbb{C})$, so bezeichnet

$$B_k = \begin{pmatrix} b_{kk} & \dots & b_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{nk} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \in M((n - k + 1), \mathbb{C})$$

für $k = 1, \dots, n$ die k -te Hauptdiagonaluntermatrix. Es gilt nun folgender Satz.

Satz 7.4.1 Es sei $B = \overline{B}^t \in M(n, \mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) Die durch B auf $\mathbb{C}^n$ induzierte Bilinearform s_B ist positiv definit.
- (b) $\det(B_k) > 0$ für $k = 1, \dots, n$.

Beweis. (a) $\rightarrow$ (b) Da s_B positiv definit ist, ist s_B ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$. Nach Korollar 7.3.6 existiert somit eine Orthonormalbasis $\underline{e}$ von $\mathbb{C}^n$ bezüglich s_B . Also existiert nach Satz 7.2.9 eine Matrix $S \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ mit

$$\overline{S}^t B S = \underline{e} M(s_B) = E_n.$$

Somit folgt

$$1 = \det(E_n) = \det(B) \cdot |\det(S)|^2.$$

Folglich ist $\det(B) = \det(B_1) > 0$. Für die weiteren Unterdeterminanten folgt die Behauptung nun durch Induktion. Betrachtet man $\mathbb{C}^{n-k}$ als Untervektorraum

$$\mathbb{C}^{n-k} = \{x \in \mathbb{C}^n; x_1 = \dots = x_k = 0\},$$

so induziert s_B auf $\mathbb{C}^{n-k}$ ein Skalarprodukt, das zu der Matrix B_k assoziiert ist. Folglich gilt $\det(B_k) > 0$ nach dem bereits Gezeigten.

(b) $\rightarrow$ (a) Wir machen Induktion nach n . Der Fall $n = 1$ ist trivial. Für den Induktionsschritt schränken wir die hermitesche Bilinearform s_B auf $\mathbb{C}^{n-1}$ ein. Nach Induktionsvoraussetzung ist $s_B|_{\mathbb{C}^{n-1}}$ positiv und somit ein Skalarprodukt. Nach Korollar 7.3.6 existiert somit eine Orthonormalbasis $\underline{e}'' = (e'_2, \dots, e'_n)$ von $\mathbb{C}^{n-1}$ bezüglich $s_B|_{\mathbb{C}^{n-1}}$. Bezeichnet $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ die kanonische Basis des $\mathbb{C}^n$, so setze

$$e'_1 := e_1 - \sum_{i=2}^n \overline{s_B(e_1, e'_i)} e'_i.$$

Dann gilt für $j = 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} s_B(e'_1, e'_j) &= s_B\left(e_1 - \sum_{i=2}^n \overline{s_B(e_1, e'_i)} e'_i, e'_j\right) \\ &= s_B(e_1, e'_j) - \sum_{i=2}^n \overline{s_B(e_1, e'_i)} s_B(e'_i, e'_j) \\ &= s_B(e_1, e'_j) - s_B(e_1, e'_j) = 0 \end{aligned}$$

Dann ist $s_B(e'_1, e'_i) = 0$ für $i = 2, \dots, n$. Weiterhin ist $\underline{e}' := (e'_1, \underline{e}'')$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$. Für die Matrixdarstellung von s_B bezüglich $\underline{e}'$ gilt

$$\underline{e}' M(s_B) = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & 1 \end{pmatrix} = S B \overline{S}^t.$$

Also folgt

$$b_{11} = \det \overset{e'}{M}(s_B) = \det(B) \cdot |\det(S)|^2 > 0 .$$

Daher gilt für jedes $x = \sum_{i=1}^n x_i e'_i \in \mathbb{C}^n$ mit $x \neq 0$ nun

$$s_B(x, x) = b_{11}x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \dots + x_n\bar{x}_n > 0 .$$

Also ist s_B positiv definit. □

7.5 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

In einem euklidischen bzw. unitären Vektorraum V sind Endomorphismen, die das Skalarprodukt respektieren, ausgezeichnet.

Definition 7.5.1 Es sei $(V, (\cdot, \cdot))$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ heißt *orthogonal* bzw. *unitär*, wenn

$$(f(x), f(y)) = (x, y) \quad \text{für alle } x, y \in V$$

gilt.

Notiz 7.5.2 Ist $f : V \rightarrow V$ orthogonal bzw. unitär, so gilt

- (a) $|f(v)| = |v|$ für alle $v \in V$.
- (b) Ist λ Eigenwert von f , so gilt $|\lambda| = 1$.
- (c) Sind $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 \perp v_2$, so gilt $f(v_1) \perp f(v_2)$.
- (d) f ist injektiv. Ist $\dim V$ endlich, so ist f sogar Isometrie.

Beweis. (a) und (c) sind trivial. (d) folgt aus (a) und Satz 2.2.3. Somit ist nur (b) zu zeigen. Ist $f(v) = \lambda(v)$ für ein $v \in V$, $v \neq 0$, und $\lambda \in K$, so gilt

$$|v| = |f(v)| = |\lambda| \cdot |v|$$

nach (a). Wegen $|v| \neq 0$ ist somit $|\lambda| = 1$. □

Definition 7.5.3 Eine Matrix $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ heißt *orthogonal*, wenn $A^{-1} = A^t$ gilt. Eine Matrix $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ heißt *unitär*, wenn $A^{-1} = \overline{A}^t$ gilt.

Notiz 7.5.4 Ist $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{C})$ eine orthogonale bzw. unitäre Matrix, so gilt:

- (a) $|\det A| = 1$.
- (b) $|a_{ij}| \leq 1$ für alle $i, j = 1, \dots, n$.
- (c) $|\text{Sp}(A)| \leq n$.

Beweis. (a) Wegen $E_n = A\bar{A}^t$ und $\overline{\det A} = \det \bar{A}^t$ gilt $1 = \det E_n = \det A \cdot \det \bar{A}$. Also gilt $|\det A| = 1$.

(b) Wegen $E_n = A\bar{A}^t$ folgt $\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2 = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot \bar{a}_{i,j} = 1$. Also $|a_{ij}| \leq 1$.

(c) folgt aus (b). $\square$

Die orthogonalen bzw. unitären Matrizen bilden eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

$$O(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) ; A^{-1} = A^t\} \quad \text{orthogonale Gruppe ,}$$

$$U(n, \mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) ; A^{-1} = \bar{A}^t\} \quad \text{unitäre Gruppe ,}$$

$$SO(n, \mathbb{R}) := \{A \in O(n, \mathbb{R}) ; \det A = 1\} \quad \text{spezielle orthogonale Gruppe}$$

Letztere ist wiederum eine Untergruppe von $O(n, \mathbb{R})$. Die Matrizen A aus $SO(n, \mathbb{R})$ heißen *eigentlich orthogonal*.

Notiz 7.5.5 Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $A \in M(n, \mathbb{K})$ sind äquivalent:

- (a) A ist orthogonal bzw. unitär; also $A \cdot \bar{A}^t = E_n$.
- (b) Die Spaltenvektoren von A sind eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt.
- (c) Die Zeilenvektoren von A sind eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt.

Satz 7.5.6 Es sei V ein endlich dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum mit einer Orthonormalbasis $\underline{e}$. Für einen Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ sind äquivalent:

$$f \text{ orthogonal bzw. unitär} \iff {}^{\underline{e}}M(f) \text{ orthogonal bzw. unitär} .$$

Beweis. Sind $v = \sum x_i e_i$ bzw. $w = \sum y_i e_i$ Vektoren aus V mit Koordinatenvektoren x bzw. y , so gilt

$$(v, w) = \bar{x}^t y ,$$

weil $\underline{e}$ eine Orthonormalbasis ist. Weiterhin hat $f(v)$ den Koordinatenvektor Ax und $f(w)$ den Koordinatenvektor Ay mit $A = {}^{\underline{e}}M(f)$. Also ist

$$(f(v), f(w)) = (\bar{Ax})^t (Ay) = x^t (\bar{A}^t A) y .$$

Somit gilt $(v, w) = (f(v), f(w))$ für alle $v, w \in V$ genau dann, wenn $\bar{A}^t A = E_n$ gilt. $\square$

Satz 7.5.7 *Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein orthogonaler Endomorphismus. Dann existiert eine Orthonormalbasis $\underline{e}$ von V , so dass*

$${}^{\underline{e}}M(f) = \begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & A_1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

gilt, wobei für $i = 1, \dots, k$ die Matrizen

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & , & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & , & \cos \alpha_i \end{pmatrix} \in SO(2)$$

mit $\alpha_i \in [0, 2\pi)$ ist.

Beweis. Wir machen Induktion nach $n = \dim V$. Im Induktionsanfang $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $n \geq 1$. Nach Lemma 6.4.7 gibt es einen Unterraum W von V mit $f(W) \subset W$ und $1 \leq \dim W \leq 2$. Da f nach Notiz 7.5.2 injektiv ist, gilt $f(W) = W$. Nun hat V eine orthogonale Zerlegung $V = W \oplus W^\perp$. Nach Notiz 7.5.2 gilt auch $f(W^\perp) = W^\perp$. Somit genügt es nach Induktionsvoraussetzung, den Satz für W zu beweisen. Der Fall $\dim W = 1$ ist trivial, weil jedes $v \in W$ mit $v \neq 0$ ein Eigenvektor von f ist. Da nach Notiz 7.5.2 alle Eigenwerte den Betrag 1 haben, ist der Eigenwert zu v entweder $+1$ oder -1 .

Nun behandeln wir den Fall $\dim W = 2$. Es ist $f|_W$ ein Endomorphismus von W . Ist $\det(f|_W) = -1$, so hat $f|_W$ die beiden reellen Eigenwerte $+1$ und -1 . Dazu betrachtet man nämlich das charakteristische Polynom

$$c(f|_W, X) = X^2 - \text{Sp}(f|_W) \cdot X + \det(f|_W) = 0.$$

Wegen $-1 = \det(f|_W)$ hat $f|_W$ zwei reelle Eigenwerte; nämlich

$$\lambda_{1/2} = \frac{\text{Sp}(f|_W)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{Sp}(f|_W)}{2}\right)^2 - \det(f|_W)},$$

Damit ist man wieder im oben bereits behandelten Fall; die Eigenwerte sind also $+1$ oder -1 . Da $\det(f|_W) = -1$ gilt und $\det(f|_W)$ gleich dem Produkt der Eigenwerte ist, ist ein Eigenwert $+1$ und einer -1 .

Im Folgenden sei nun $\det(f|_W) = +1$. Es sei $\underline{e} = (e_1, e_2)$ eine Orthonormalbasis von W . Dann existiert eine Drehung $\delta : W \rightarrow W$ mit $\delta(f(e_1)) = e_1$. Dann hat $g := \delta \circ f|_W$ den Vektor e_1 als Eigenvektor mit Eigenwert 1 . Da g auch orthogonal ist, folgt

$$g(\langle e_2 \rangle) = g(\langle e_1 \rangle^\perp) = \langle e_1 \rangle^\perp = \langle e_2 \rangle.$$

Also ist e_2 Eigenvektor von g mit Eigenwert $+1$ oder -1 . Wegen $\det(f|_W) = 1$ ist der Eigenwert $+1$. Dann ist $g = \text{id}_W$ und $f|_W = \delta^{-1}$ ist eine Drehung. $\square$

7.6 Spektralsatz

Im folgenden sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum.

Definition 7.6.1 $f \in \text{End}_K(V)$ heißt *selbstadjungiert*, wenn gilt

$$(fx, y) = (x, fy) \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

Bemerkung 7.6.2 Ist $\underline{e}$ eine Orthonormalbasis von V und $A = {}^e M(f)$, so ist f genau dann selbstadjungiert, wenn $A = A^*$ gilt, also wenn A symmetrisch bzw. hermitesch ist. Zur Erinnerung $A^* := \overline{A}^t$.

Beweis. Sei $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $w = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned} fv &= \sum \tilde{x}_i e_i \quad \text{wobei } \tilde{x} = Ax \\ fw &= \sum \tilde{y}_i e_i \quad \text{wobei } \tilde{y} = Ay. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} (v, fw) &= \overline{x}^t \tilde{y} = \overline{x}^t (Ay) = \overline{x}^t A y \\ (fv, w) &= \overline{(\tilde{x})}^t y = \overline{(Ax)}^t y = \overline{x}^t \overline{A}^t y \end{aligned}$$

Somit gilt $(v, fw) = (fv, w)$ für alle $v, w \in V$ genau dann, wenn $A = \overline{A}^t$ gilt. $\square$

Lemma 7.6.3 Ist $f \in \text{End}_K(V)$ selbstadjungiert, so zerfällt das charakteristische Polynom in reelle Linearfaktoren

$$c(f, X) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X) \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Sei zunächst V unitär; also V ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Somit zerfällt $c(f, X)$ in komplexe Linearfaktoren $(\lambda_i - X)$ mit $\lambda_i \in \mathbb{C}$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von f sind. Ist λ Eigenwert und $v \in V$ Eigenvektor zu λ , so gilt

$$\lambda(v, v) = (v, \lambda v) = (v, fv) = (fv, v) = (\lambda v, v) = \overline{\lambda}(v, v).$$

Wegen $(v, v) \neq 0$ folgt $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$.

Sei nun V euklidisch. Sei $\underline{e}$ eine Orthonormalbasis von V und sei $A = {}^e M(f)$. Dann gilt $A = A^t \in M(n, \mathbb{R})$, also $A = A^*$. Somit ist A selbstadjungiert auf dem unitären Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit dem üblichen Skalarprodukt. Nach dem unitären Fall zerfällt $c(A, X)$ in reelle Linearfaktoren, also auch $c(f, X)$. $\square$

Satz 7.6.4 (Spektralsatz für selbstadjungierte Abbildungen) Es sei V ein endlich dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Dann sind äquivalent

1. f ist selbstadjungiert.
2. Die Eigenwerte von f sind reell und es gibt eine Orthonormalbasis von V bestehend aus Eigenvektoren von f .

Beweis. (1) $\rightarrow$ (2) Induktion nach $n = \dim V$.

Im Fall $n = 1$ ist die Behauptung trivial. Sei nun $n \geq 2$. Nach Lemma 7.6.3 gibt es einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ und einen Eigenvektor $v \in V$ mit $fv = \lambda v$. Setze nun $e_1 = v/|v|$ und $U = \langle e_1 \rangle^\perp$. Dann gilt für $x \in U$:

$$\langle fx, e_1 \rangle = \langle x, fe_1 \rangle = \langle x, \lambda e_1 \rangle = \lambda \langle x, e_1 \rangle = 0.$$

Also gilt $f(x) \in \langle e_1 \rangle^\perp = U$. Es folgt $f(U) \subset U$. Weiter ist $f|_U \in \text{End}_K(U)$ ein selbstadjungierter Endomorphismus von U . Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Orthonormalbasis $(e_2, \dots, e_n)$ von U bestehend aus Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten. Dann leistet $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ das Gewünschte.

(2) $\rightarrow$ (1) Sei $(e_1, \dots, e_n) = \underline{e}$ eine Orthonormalbasis von V bestehend aus Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten. Sei

$$A = {}^{\underline{e}}M(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Wegen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ gilt $A = \overline{A}^t$. Nach Bemerkung 7.6.2 ist f selbstadjungiert. $\square$

Korollar 7.6.5 Ist f selbstadjungiert, so ist f diagonalisierbar.

Korollar 7.6.6 Ist f selbstadjungiert und sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ paarweise verschiedene Eigenwerte von f , so hat man eine orthogonale Zerlegung

$$V = E(f, \lambda_1) \perp \dots \perp E(f, \lambda_r).$$

Korollar 7.6.7 Ist $A \in M(n, \mathbb{R})$ symmetrisch bzw. $A \in M(n, \mathbb{C})$ hermitesch, so existiert eine orthogonale Matrix $S \in O(n, \mathbb{R})$ bzw. $S \in U(n, \mathbb{C})$, so dass SAS^* diagonal ist.

7.7 Normale Endomorphismen

Für einen K -Vektorraum V bezeichnet man mit

$$V^* := \text{Hom}_K(V, K)$$

den Dualraum zu V . Ist $f : V \rightarrow W$ eine K -lineare Abbildung, so induziert f eine K -lineare Abbildung

$$f^t : W^* \longrightarrow V^*, \quad \lambda \mapsto \lambda \circ f.$$

Man nennt f^t die *duale Abbildung* zu f .

Im folgenden sei nun V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Dann erhält man den kanonischen Isomorphismus

$$V \xrightarrow{\sim} V^* ; \quad x \mapsto \lambda^x := (x, _)$$

der einem Vektor $x \in V$ die Linearform

$$\lambda^x : V \longrightarrow K ; \quad y \mapsto (x, y)$$

zuordnet. Ist nun $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, so ist $\lambda^x \circ f : V \rightarrow K$ eine Linearform auf V . Wegen der Isomorphie $V \xrightarrow{\sim} V^*$ gibt es dann ein eindeutig bestimmtes $f^*(x) \in V$ mit $\lambda^x \circ f = \lambda^{f^*(x)}$. Man erhält also eine wohl definierte Abbildung

$$f^* : V \longrightarrow V ,$$

die die Bedingung

$$(x, f(y)) = \lambda^x(f(y)) = \lambda^{f^*(x)}(y) = (f^*(x), y) \quad \text{für alle } x, y \in V$$

erfüllt. Man rechnet sofort nach, dass f^* auch K -linear ist. Denn es gilt

$$\begin{aligned} (f^*(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), y) &= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, f(y)) \\ &= \bar{\lambda}_1(x_1, f(y)) + \bar{\lambda}_2(x_2, f(y)) \\ &= \bar{\lambda}_1(f^*(x_1), y) + \bar{\lambda}_2(f^*(x_2), y) \\ &= (\lambda_1 f^*(x_1) + \lambda_2 f^*(x_2), y) \end{aligned}$$

für alle $y \in V$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ und $x_1, x_2 \in V$. Also gilt

$$f^*(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f^*(x_1) + \lambda_2 f^*(x_2) .$$

Weiterhin kann man $(f^*)^*$ zu f^* bilden und es gilt

$$\begin{aligned} (f^{**}(x), y) &= (x, f^*(y)) \\ &= \overline{(f^*(y), x)} = \overline{(y, f(x))} \\ &= \overline{\overline{(f(x), y)}} = (f(x), y) \end{aligned}$$

für alle $x, y \in V$. Also gilt $f = f^{**}$.

Definition 7.7.1 Der Endomorphismus $f^* : V \rightarrow V$ zu dem Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ heißt *adjungierte Abbildung*. Die Abbildung f^* ist linear und erfüllt $f^{**} = f$.

Notiz 7.7.2 Es sei $\underline{e}$ eine Orthonormalbasis eines endlich dimensionalen Vektorraums V und $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Ist $A = (a_{ij}) = {}^{\underline{e}}M(f)$ die Matrixdarstellung von f bzgl. der Orthonormalbasis $\underline{e}$, so hat f^* die Matrixdarstellung

$${}^{\underline{e}}M(f^*) = A^* := \overline{A}^t$$

bezüglich der Orthonormalbasis $\underline{e}$.

Insbesondere erhält man so auch einen neuen Beweis für die Existenz der adjungierten Abbildung. Ist nämlich f mit der Matrixdarstellung A bezüglich einer Orthonormalbasis wie oben gegeben, so ist $f^* := {}^{\underline{e}}L(A^*)$ die duale Abbildung zu f .

Beweis. Seien $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ und $w = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, so gilt

$$(v, fw) = \overline{x}^t A y = \overline{(\overline{A}^t x)}^t y = (f^*(v), w) .$$

Zum Beweis des Zusatzes rechne man für die Abbildung $f^* := {}^{\underline{e}}L(A^*)$ die definierende Gleichung $(f^*v, w) = (v, w)$ für alle $v, w \in V$ nach. $\square$

Notiz 7.7.3 Es sei $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann gilt

- (a) f ist selbstadjungiert genau dann, wenn $f = f^*$ gilt.
- (b) f ist unitär bzw. orthogonal genau dann, $f \circ f^* = f^* \circ f = \text{id}_V$ gilt.

Notiz 7.7.4 Sind $f, g \in \text{End}(V)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, so gilt

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)^* &= \overline{\lambda} f^* + \overline{\mu} g^* , \\ (\lambda \cdot \text{id}_V)^* &= \overline{\lambda} \cdot \text{id}_V . \end{aligned}$$

Beweis. Man rechnet sofort nach, dass $\overline{\lambda} f^* + \overline{\mu} g^*$ die Bedingung der adjungierten Abbildung zu $\lambda f + \mu g$ erfüllt. Weiterhin gilt offenbar $\text{id}_V^* = \text{id}_V$. $\square$

Definition 7.7.5 Es sei V ein endlich dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ heißt *normal*, wenn $f f^* = f^* f$ gilt.

Beispiel 7.7.6 Ist $f : V \rightarrow V$ orthogonal bzw. unitär, so ist f normal. Ebenso sind selbstadjungierte Endomorphismen normal.

Lemma 7.7.7 Es sei V ein endlich dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Für einen normalen Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ gilt:

- (a) $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^*)$
- (b) $E(f, \lambda) = E(f^*, \overline{\lambda})$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$.

Beweis. Für $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} |f(v)|^2 &= (f(v), f(v)) \\ &= (f^*f(v), v) = (ff^*(v), v) \\ &= (f^*(v), f^*(v)) = |f^*(v)|^2 . \end{aligned}$$

Daraus folgen (a) und (b) wegen

$$\begin{aligned} E(f, \lambda) &= \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V) = \text{Ker}((f - \lambda \text{id}_V)^*) \\ &= \text{Ker}(f^* - \bar{\lambda} \text{id}_V) = E(f^*, \bar{\lambda}) . \end{aligned} \quad \square$$

Satz 7.7.8 *Es sei V ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum. Für einen Endomorphismus f von V sind äquivalent:*

- (a) *Es gibt eine Orthonormalbasis von V bestehend aus Eigenvektoren.*
- (b) *f ist normal.*

Beweis. (a) $\rightarrow$ (b) ist trivial nach Notiz 7.7.2. Ist nämlich $\underline{e}$ eine Orthonormalbasis von V bestehend aus Eigenvektoren von f , so ist $A = {}^{\underline{e}}M(f)$ diagonal und A^* ebenso diagonal. Also gilt $AA^* = A^*A$ und daraus folgt $ff^* = f^*f$.

(b) $\rightarrow$ (a) Wir machen Induktion nach $\dim V$. Im Fall $\dim V = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei nun $V \neq \{0\}$. Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, gibt es einen Eigenvektor $v \in V$ mit $|v| = 1$ zu einem Eigenwert λ . Setze nun

$$W := \{w \in V ; (v, w) = 0\} = \langle v \rangle^\perp .$$

Ist $w \in W$, so gilt wegen Lemma 7.7.7

$$(v, f(w)) = (f^*(v), w) = (\bar{\lambda}v, w) = \lambda(v, w) = 0 .$$

Also gilt $f(W) \subset W$. Ebenso zeigt man $f^*(W) \subset W$. Nun ist $g := f|_W \in \text{End}(W)$ wieder normal. Auf g können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten so die Behauptung. $\square$

Korollar 7.7.9 *Ist $A \in M(n, \mathbb{C})$, so sind äquivalent*

- (a) *Es gibt eine unitäre Matrix $S \in U(n, \mathbb{C})$, so dass SAS^* diagonal ist.*
- (b) *Es gilt $AA^* = A^*A$.*

Korollar 7.7.10 *Es sei V ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum. Dann sind für einen Endomorphismus $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ äquivalent*

- (a) *Es gibt eine Orthonormalbasis von V bestehend aus Eigenvektoren von f und alle Eigenwerte von f haben den Betrag 1.*
- (b) *f ist unitär.*

Beweis. (a) $\rightarrow$ (b) Nach Satz 7.7.8 ist f normal. Ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, so gilt nach Lemma 7.7.7

$$ff^*(v) = \bar{\lambda}f(v) = \bar{\lambda}\lambda v = 1 \cdot v = v.$$

Da es eine Basis aus Eigenvektoren $\underline{e}$ mit $ff^*(e_i) = e_i$ für $i = 1, \dots, n$ gibt, gilt $ff^* = \text{id}_V$. Also ist f unitär.

(b) $\rightarrow$ (a) Da f unitär ist, ist f normal. Also kann man Satz 7.7.8 anwenden. Somit bleibt nur zu zeigen, dass jeder Eigenwert λ eines unitären Endomorphismus vom Betrag 1 ist. Das folgt aber aus Notiz 7.5.2. $\square$

7.8 Positive Endomorphismen

Im folgenden sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum.

Definition 7.8.1 Ein selbstadjungierter Endomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$ heißt *positiv*, wenn

$$(fx, x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in V$$

gilt.

In Analogie zu den Zahlen, wo $\lambda\bar{\lambda}$ eine nichtnegative Zahl ist, ist für einen Endomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$ auch $f \circ f^*$ positiv. Das rechnet man sofort nach!

Satz 7.8.2 *Es sei V ein endlich dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Für einen Endomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$ sind äquivalent:*

- (1) *f ist positiv.*
- (2) *Es existiert ein $g \in \text{End}_K(V)$ mit $f = g \circ g^*$.*
- (3) *Es existiert ein selbstadjungiertes $g \in \text{End}_K(V)$ mit $f = g^2$.*

Zusatz: Ist f positiv, so gibt es (genau) ein positives $g \in \text{End}_K(V)$ mit $f = g^2$.

Beweis. 1 $\rightarrow$ 3: Ist $x \in V$ ein Eigenvektor, so gilt

$$0 \leq (x, fx) = (x, \lambda x) = \lambda(x, x).$$

Wegen $(x, x) > 0$ folgt $\lambda \geq 0$. Nach Satz 7.6.4 gibt es eine Orthonormalbasis $\underline{e}$ von V bestehend aus Eigenvektoren von f . Also gilt

$$A := {}^{\underline{e}}M(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dabei sind alle $\lambda_i \geq 0$. Setzt man nun

$$B := {}^e M(g) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

so gilt $A = B^2$. Setzt man nun $g := {}^e L(B)$, so gilt $f = g^2$ und g ist positiv.

$3 \rightarrow 2$: Da g selbstadjungiert ist, gilt $g = g^*$ und damit $f = g^2 = g \circ g^*$.

$2 \rightarrow 1$: Ist $f = g \circ g^*$, so gilt

$$f^* = (g \circ g^*)^* = g^{**} \circ g^* = g \circ g^* = f.$$

Weiterhin gilt für $x \in V$ nun

$$(fx, x) = (g \circ g^*(x), x) = (g^*(x), g^*(x)) \geq 0.$$

Somit ist f positiv.

Zum Zusatz: Es ist nur noch die Eindeutigkeit zu zeigen; die Existenz hatten wir bei der Richtung $1 \rightarrow 3$ gezeigt. Ist $f = g^2$ mit einem positivem $g \in \text{End}_K(V)$, so sind die Eigenräume von g genau die Eigenräume von f . Auf jedem Eigenraum $E(f, \lambda)$ ist g von der Form $g|_{E(f, \lambda)} = \sqrt{\lambda} \cdot \text{id}_{E(f, \lambda)}$. Da die Eigenräume von f eindeutig bestimmt sind, ist g eindeutig durch f festgelegt. $\square$

In Analogie zur Polarkoordinatendarstellung von komplexen Zahlen gilt noch der Satz:

Satz 7.8.3 (Polarzerlegung) *Es sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Zu jedem Isomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$ existieren eindeutig bestimmte $u, p \in \text{End}_K(V)$, so dass $f = u \circ p$ gilt, wobei u orthogonal bzw. unitär und p positiv ist.*

Beweis. Da $f^* \circ f$ positiv ist, existiert ein positives $p \in \text{End}_K(V)$ mit $f^* \circ f = p^2$. Setze nun $v := p \circ f^{-1}$. Dann gilt

$$v^* = (f^{-1})^* \circ p^* = (f^*)^{-1} \circ p.$$

Damit folgt

$$v^* \circ v = (f^*)^{-1} \circ p \circ p \circ f^{-1} = (f^*)^{-1} \circ p^2 \circ f^{-1} = (f^*)^{-1} \circ f^* \circ f \circ f^{-1} = \text{id}_V.$$

Daher ist v orthogonal bzw. unitär. Es ist $f = u \circ p$ mit $u := v^* = v^{-1}$ die gesuchte Darstellung.

Zur Eindeutigkeit: Ist $f = u \circ p$, so ist

$$f^* \circ f = p \circ u^* \circ u \circ p = p^2,$$

weil $u^* \circ u = \text{id}_V$ für orthogonale bzw. unitäre u gilt. Nach dem Zusatz in Satz 7.8.2 ist p durch $f^* \circ f$, also durch f eindeutig bestimmt. Damit ist auch u eindeutig bestimmt, weil p ebenso wie f invertierbar sein muss. $\square$

Bemerkung 7.8.4 Geometrisch bedeutet Satz 7.8.3, dass jedes $f \in \text{GL}(V)$ Produkt einer Isometrie und eines Endomorphismus ist, der bzgl. einer Orthonormalbasis durch eine Diagonalmatrix mit nur positiven Elementen in der Diagonalen, also einer Streckung in Richtung der einzelnen Koordinaten, darstellbar ist.