

# Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Institut für Reine Mathematik

SS 2014 – Blatt 02

---

Abgabetermin: Freitag, 09.05.2014 um 12:15 Uhr vor Beginn der Übungen

---

6. Es sei  $(V; \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass  $V$  kanonisch isomorph ist zu dem dualen Vektorraum  $V^*$ , d.h. zu dem Vektorraum  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ . Führen Sie dazu die Abbildung

$$\Phi: V \rightarrow V^*; v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$$

ein, wobei  $\langle v, \cdot \rangle$  die Abbildung  $V \rightarrow \mathbb{R}; w \mapsto \langle v, w \rangle$  ist. Gehen Sie dann wie folgt vor.

- (a) Zeigen Sie, dass  $\Phi$  wohldefiniert ist, dass also  $\langle v, \cdot \rangle \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$  gilt. (1 P)
  - (b) Zeigen Sie, dass  $\Phi$  linear ist. (1 P)
  - (c) Zeigen Sie, dass  $\Phi$  injektiv ist, indem Sie den Kern berechnen. (2 P)
  - (d) Zeigen Sie, dass  $\Phi$  surjektiv ist. (2 P)
7. Es sei  $V = \mathbb{R}^3$  und  $f$  die Drehung an der Achse  $(1, 2, 2)^t$  um  $\frac{3\pi}{2}$  und  $g$  die Drehung an der Achse  $(-4, 1, 1)^t$  um  $\frac{\pi}{2}$ .

- (a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis, so dass  $f$  die Form von Satz 7.5.7 hat. Geben Sie auch die Matrix von  $g$  bezüglich dieser Basis an. (4 P)  
*Hinweis:* Die beiden Drehachsen stehen senkrecht aufeinander. Nutzen Sie diesen Umstand um die Rechnung zu vereinfachen.
- (b) Berechnen Sie die Matrix von  $f \circ g$  in der obigen Basis. Zeigen Sie, dass es sich hierbei wieder um eine Drehung handelt, indem Sie die Drehachse zur obigen Basis und zur kanonischen Basis sowie den Drehwinkel berechnen. (4 P)

8. Es sei

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie alle Hauptdiagonalunterdeterminanten  $B_4, \dots, B_1$  von  $B$ . Prüfen Sie, ob  $B$  positiv definit ist. (4 P)
  - (b) Prüfen Sie, ob  $B$  positiv definit ist, indem Sie das Verfahren von Gram-Schmidt auf die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^4$  mit der Bilinearform  $s_B(x, y) = \bar{x}^t B y$  anwenden. (4 P)
9. Es sei  $C_{2\pi}(\mathbb{R})$  der Vektorraum der stetigen,  $2\pi$ -periodischen Funktionen auf  $\mathbb{R}$ . Der Raum sei mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

versehen. Weiter sei  $a_0 := 1/\sqrt{2}$ ,  $a_{2k-1} := \sin(kt)$ ,  $a_{2k} := \cos(kt)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

(a) Zeigen Sie dass  $\{a_k ; k \in \mathbb{N}_0\}$  eine orthonormale Familie von Vektoren ist. (4 P)

(b) Es sei  $f$  die Dreiecksfunktion, also

$$f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{\pi}x - 1 & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \\ -\frac{2}{\pi}x + 3 & \text{für } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} ,$$

die auf  $\mathbb{R}$  periodisch fortgesetzt wird. Berechnen Sie die Projektion von  $f$  auf den Unterraum von  $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ , der von  $a_0, a_1, a_2, a_3$  und  $a_4$  aufgespannt wird. (4 P)