

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Institut für Reine Mathematik

SS 2014 – Blatt 04

Abgabetermin: Freitag, 23.05.2014 um 12:15 Uhr vor Beginn der Übungen

14. Berechnen Sie eine Basis, so dass die Bilinearform

$$s_B(x, y) = x^t \begin{pmatrix} -1 & 10 & -1 \\ 10 & 8 & 10 \\ -1 & 10 & -1 \end{pmatrix} y$$

die Gestalt aus dem Sylvesterschen Trägheitssatz (7.9.4) hat. (6 P)

15. Es sei $A \in M(2, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix ungleich 0, $b \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$. Weiter sei $X = (X_1, X_2)^t$ und

$$q(X) = X^t A X + b^t X + c. \quad (1)$$

Wir nennen die Lösungsmenge von $q(X) = 0$ einen Kegelschnitt. Ein Kegelschnitt heißt entartet, wenn er leer ist, aus nur einem Punkt, einer Gerade oder der Vereinigung zweier Geraden besteht. Zur Klassifikation von Kegelschnitten verwenden wir die Determinante $D(q) := \det A$. Wir wollen in dieser Übung teilweise den folgenden Satz beweisen:

Jeder nicht entartete Kegelschnitt ist kongruent zu einer der folgenden Typen:

- (i) Ellipse $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - 1 = 0$ falls $D(q) > 0$
- (ii) Hyperbel $a_{11}x_1^2 - a_{22}x_2^2 - 1 = 0$ falls $D(q) < 0$
- (iii) Parabel $a_{11}x_1^2 - x_2 = 0$ falls $D(q) = 0$

wobei jeweils $a_{11}, a_{22} > 0$ ist.

Kongruent bedeutet, dass nach einer affin-linearen Transformation $x \mapsto Tx + \gamma$, wobei T eine Drehung ist und γ ein Vektor ist, die Gleichung die angegebene Form erhält. Es sei q ein nicht entarteter Kegelschnitt.

- (a) Zeigen Sie, dass es eine Drehung T gibt, so dass nach der Koordinatentransformation $X' = TX$ in der Gleichung (1) die Matrix A Diagonalgestalt besitzt. Zeigen Sie weiter, dass es sogar eine (nicht notwendigerweise orthonormale) Basis des $\mathbb{R}^2$ gibt, so dass die zugehörige Koordinatentransformation zu einer Gleichung führt, in der A eine Diagonalmatrix ist, auf deren Diagonale nur die Werte 1, -1 und 0 auftauchen. (4 P)
- (b) Zeigen Sie, dass unter der Voraussetzung $D(q) \neq 0$ die Gleichung (1) mittels einer affin-linearen Abbildung sich in einen der Fälle (i) bzw. (ii) transformieren lässt. (4 P)

16. Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung von

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie auch die Transformationsmatrizen an. (4 P)

17. Beweisen Sie die folgenden Formeln:

- (a) Es sei $D \in M(m \times n, \mathbb{C})$ eine Diagonalmatrix. Zeigen Sie, dass

$$D^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (D^* D + \varepsilon E_n)^{-1} D^*$$

gilt, wobei D^+ die Moore-Penrose-Inverse bezeichnen soll. (2 P)

- (b) Für jedes $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$ gilt:

- (a) $(A^+)^+ = A$
- (b) $\overline{A}^+ = \overline{A^+}$
- (c) $(A^*)^+ = (A^+)^*$
- (d) $(\lambda A)^+ = \lambda^{-1} A^+$ für $\lambda \neq 0$,

wobei A^+ die Moore-Penrose-Inverse bezeichnen soll. (4 P)

Berichtigung im Skript auf Seite 151:

In der 5. Zeile von unten muss es heißen ... wegen $\overline{P}Ax = AA^+Ax = Ax \dots$

Berichtigung im Skript auf Seite 152:

Am Ende der 4. Zeile muss es heißen $\dots D^+DD^+ = D^+ \dots$ und in der Mitte

$$\begin{aligned} (A^*A + \varepsilon E_n)^{-1}A^* &= (T^*D^*DT + \varepsilon E_n)^{-1}T^*D^*S^* \\ &= [T^{-1}(D^*DT + \varepsilon T)]^{-1}T^*D^*S^* \\ &= (D^*DT + \varepsilon T)^{-1}TT^*D^*S^* \\ &= [(D^*D + \varepsilon E_n)T]^{-1}D^*S^* \\ &= T^{-1}(D^*D + \varepsilon E_n)^{-1}D^*S^* \\ &= T^* \cdot \Delta(\varepsilon) \cdot S^* \end{aligned}$$