

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Institut für Reine Mathematik

SS 2014 – Blatt 06

Abgabetermin: Freitag, 06.06.2014 um 12:15 Uhr vor Beginn der Übungen

22. Zeigen Sie, dass jeder affine Unterraum U von K^n Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems ist, indem Sie eine geschickte Basis von K^n und ein konkretes Gleichungssystem angeben. (4 P)

23. Betrachten Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie jeweils die konvexe Hülle K , sowie die Ecken von K . Prüfen Sie außerdem, ob die Funktion $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ ein Minimum/Infimum bzw. Maximum/Supremum auf K hat.

(a) $\{(0, 0)\} \cup \{(n, 1), n \in \mathbb{N}_0\}$ (3 P)

(b) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \setminus \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$. (3 P)

24. Es sei

$$M_0 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 0 \leq y \leq 1, x \in \{-1, +1\}, z = 0\}$$
$$M_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x = 0, 0 \leq y \leq 1, (y - 1)^2 + z^2 = 1\} .$$

Weiter sei $K := \text{Kon}(M_0 \cup M_1)$. Fertigen Sie eine Skizze von K an und bestimmen Sie $E(K)$. Ist $E(K)$ kompakt? (5 P)

25. Es sei $K \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte, konvexe Teilmenge der Ebene.
Zeigen Sie, dass die Menge der Ecken $E(K)$ kompakt ist. (5 P)

Hinweise:

- (a) Nutzen Sie das Folgenkriterium für Kompaktheit, nehmen Sie also eine konvergente Folge $(x_n, y_n) \in E(K)$ mit Grenzwert (x, y) und führen Sie die Aussage $(x, y) \notin E(K)$ zum Widerspruch.
- (b) Es sei (x, y) innerer Punkt von $[P, Q]$ mit $P = (P_x, P_y)$ und $Q = (Q_x, Q_y)$. Begründen Sie, warum Sie ohne Einschränkung der Allgemeinheit von $P_x < x < Q_x$ ausgehen dürfen.
- (c) Zeigen Sie, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $P_x < x_n < Q_x$ für alle $n \geq n_0$ gilt.
- (d) Begründen Sie, warum Sie ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen dürfen, dass y_n „über“ der Geraden $[P, Q]$ liegt, also

$$y_n > P_y + (x_n - P_x) \cdot \frac{Q_y - P_y}{Q_x - P_x}$$

für alle $n \geq n_0$ gilt.

- (e) Betrachten Sie die konvexe Hülle der Punkte $P, Q, (x_{n_0}, y_{n_0})$ und zeigen Sie, dass y_n nicht gegen y konvergieren kann.