Prof. Dr. Stefan Wewers
Institut für Reine Mathematik

Seminar im SS 14

Darstellungstheorie endlicher und kompakter Gruppen

vorläufiges Programm

Stand: 14.2.2014

1 Vortragsthemen

Die grundlegenden Begriffe über Darstellungen sollten allen Seminarteilnehmern schon vor dem 1. Vortrag bekannt sein und werden dort nur kurz wiederholt. Im ganzen Seminar ist eine *Darstellung* einer Gruppe G ein Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V),$$

wobei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum ist. Die Gruppe G wird in den Vorträgen 1-4 endlich sein. Im Vortrag 5 und 6 betrachten wir auch sogenannte kompakte Gruppen.

Vortrag 1: Der Satz von Maschke und das Lemma von Schur

Vortragender: Felix Merkel

- Definieren Sie, was eine unitäre Darstellung ist und zeigen Sie, dass jede Darstellung isomorph zu einer unitären Darstellung ist ([1], Chapter 9, §2). Explizites Beispiel: [1], Example 2.9.

- Zeigen Sie: jede Unterdarstellung besitzt ein Komplement. Daraus folgt, dass jede Darstellung in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen zerfällt (Satz von Maschke). Siehe [1], §9.4 oder [3], §1.3-1.4.

- Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass der Satz von Maschke für nicht-endliche Gruppen falsch ist, z.B. für $G = \mathbb{Z}$ und die Darstellung

$$\rho(a) := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Beweisen Sie das Lemma von Schur ([1], Theorem 9.6, oder [3], §2.2, Proposition 4. Schließen Sie daraus, dass jede Darstellung einer endlichen abelschen Gruppe in eine direkte Summe von eindimensionalen Darstellungen zerfällt. Eine schöne Anwendung ist der folgende Satz aus der linearen Algebra: zwei diagonaliserbare Matrizen $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sind genau dann gemeinsam diagonalisierbar (d.h. es gibt ein $S \in \mathrm{GL}(V)$ so dass SAS^{-1} und SBS^{-1} diagonalisierbar sind), wenn sie kommutieren (d.h. wenn $AB = BA$ gilt).

Vortrag 2: Charaktertheorie, I

Vortragende: Paula Truöl

- Definieren Sie den Charakter einer Darstellung und beweisen Sie die offensichtlichen Eigenschaften ([3], §2.1 oder [1], §9.5.)
- Bestimmen Sie den Charakter einer Permutationsdarstellung und sämtlicher irreduzibler Charaktere von S_3.
- Formulieren Sie die Orthogonalitätsrelationen ([3], §2.3, Theorem 3, ohne Beweis) und beweisen Sie damit [3], §2.3, Theorem 4, Corollary 1,2 und Theorem 5.
- Bestimmen Sie die Zerlegung des regulären Charakters in Irreduzible ([3], §2.4).
- Zeigen Sie, dass die irreduziblen Charaktere eine Orthonormalbasis des Raumes der Klassenfunktionen bilden. Schließen Sie daraus, dass die Anzahl der irreduziblen Charaktere gleich der Anzahl der Konjugiertenklassen von G ist, [3], §2.5. Illustrieren Sie Alles anhand der Charaktertafel von S_3.

Vortrag 3: Charaktertheorie, II

Vortragender: Jonas Klesel

- Definieren Sie das Tensorprodukt $V \otimes W$ zweier Darstellungen und die duale Darstellung V^* und bestimmen Sie die zugehörigen Charaktere. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$. Siehe [2], §1.1 und §2.1, Proposition 2.1.
- Beweisen Sie die Orthogonalitätsrelationen, mit dem Argument aus [2], §2.2. Vergleiche mit [3], §2.3 und [1], §9.9.
- Geben Sie die kanonische Zerlegung einer Darstellung und die Projektionen auf die *isotypischen Komponenten* an, [3], §2.7.
- Bestimmen Sie die Charaktertafeln von S_4 und A_4 ([2], §2.3).

Vortrag 4: Induzierte Darstellungen

Vortragender: Matthias Hauber-Franken

Quelle: [3], §3.3 oder [2], §3.3. Beispiele: die Charaktertafel von A_5 und S_5.

Vortrag 5: Kompakte Gruppen

Vortragender: Tilman Alemán

Quelle: [1], Chapter, 8, §2-3, Chapter 9, §3,

Vortrag 6: Die irreduziblen Darstellungen von SU_2 und $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$

Vortragender: Dragan Ströbele

Quelle: [1], Kapitel 9, §3,10.

weitere mögliche Vorträge

Vortrag 6: Die Gruppenalgebra

Quelle: [3], §6.1-6.3, oder [2], §3.4.

Vortrag 7: Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe, I

Quelle: [2], §4.1-4.2, oder [4], §10.

Vortrag 8: Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe, II

Quelle: [2], §4.1-4.2, oder [4], §10.

References

[1] M. Artin. *Algebra*.

[2] W. Fulton and J. Harris. *Representation Theory – a first course*. Number 129 in GTM. Springer-Verlag, 1991.

[3] J.P. Serre. *Linear Representations of Finite Groups*. Springer-Verlag.

[4] B. Steinberg. *Representation Theory of Finite Groups – an introductory approach*. Springer-Verlag.