Algebra: Blatt 1

Irene Bouw
Michael Eskin

Abgabe: 25.10.2013, vor der Übung

Aufgabe 1 *(2+3 Punkte)*

(a) Sei $L = \mathbb{Q}(\alpha)$, wobei α Nullstelle des Polynoms X^3+2X+1 ist. Sei weiter $g = X^3+X+1$. Hat g eine Nullstelle in L?

(b) Sei α Nullstelle von $X^4 - 10X^2 + 1$ und $L = \mathbb{Q}(\alpha)$. Hat $g = X^2 - 6$ eine Nullstelle in L?

Aufgabe 2 *(5 Punkte)*

Sei L/K eine endliche Körpererweiterung vom Grad $[L : K] = 2^k$. Sei $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad 3, welches in L eine Nullstelle hat. Zeigen Sie, dass dann f bereits eine Nullstelle in K besitzt.

Aufgabe 3 *(1+1+1+1+1 Punkte)*

Überprüfen Sie ob die folgenden Polynome irreduzibel über K sind.

(a) $K = \mathbb{Q}, f = X^4 + 5X^2 + 30X + 20$.

(b) $K = \mathbb{Q}, f = 4X^3 - 3X + \frac{1}{2}$.

(c) $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, mit $\alpha^4 + 10\alpha^2 + 1 = 0$ und $f = X^2 - 6$.

(d) $K = \mathbb{Q}, f = X^4 + 7X^3 + 2X + 3$.

(e) $K = \mathbb{Q}, f = X^5 + 9X^3 + 12X^2 + 12X + 3$.

Aufgabe 4 *(2+1+2 Punkte)*

Sei $K = \mathbb{Q}$.

(a) Seien $D_1, D_2 \in K$ keine Quadrate. Ist D_1D_2 ebenfalls kein Quadrat, dann ist die Körpererweiterung $K(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})/K$ vom Grad 4. In diesem Fall nennt man die Körpererweiterung auch *biquadratisch*.

(b) Falls D_1D_2 doch ein Quadrat ist, dann ist $K(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})/K$ eine Körpererweiterung vom Grad 2.

(c) Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ und b sei kein Quadrat. Zeigen Sie, dass $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ sich genau dann als $\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2}$ mit $D_1, D_2 \in \mathbb{Q}$ schreiben lässt, wenn $a^2 - b$ ein Quadrat ist.

Hinweis: Bestimmen Sie alle Nullstellen des Minimalpolynoms von $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ und schreiben Sie diese als $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2$. Tun Sie unter der Bedingung dass D_1D_2 kein Quadrat ist, das Gleiche für die Nullstellen des Minimalpolynoms von $\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2}$ und bezeichnen Sie diese als $\pm\beta_1, \pm\beta_2$. Betrachten Sie nun $\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2$ und $\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2$.