Algebra: Blatt 10

Irene Bouw
Michael Eskin

Abgabe: 24.01.2014, vor der Übung

Aufgabe 1

(a) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $F \in k[X_1, \dots, X_n]$ ein reduziertes Polynom (d.h. $F = \prod f_i$ wobei die f_i paarweise verschiedene irreduzible Faktoren seien, d.h. jeder irreduzible Faktor tritt nur in einfacher Potenz auf). Sei nun $W = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{A}_k^n$. Zeigen Sie, dass $(F) = I(W)$.

(b) Bestimmen Sie zu folgenden Idealen $I_i \subset \mathbb{C}[X, Y]$ die radikalen Ideale.

(i) $I_1 = (X^3 - XY^2 + X^2Y + Y^3)$

(ii) $I_2 = (X^2 - Y^3, X + Y)$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass folgende über $k = \mathbb{C}$ definierte affine algebraische Varietäten isomorph sind zu $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ oder $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \backslash \{0\} := \mathcal{Z}(XY - 1) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$. Geben Sie sowohl den Isomorphismus als auch den zugehörigen k-Algebrahomomorphismus an.

(i) $\mathcal{Z}(X^2 + Y^2 + 1)$

(ii) $\mathcal{Z}(X^2 + Y^2 - 1)$

(iii) $\mathcal{Z}(Y - X^2)$

(iv) $\mathcal{Z}(X^2)$

Aufgabe 3

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass ein Unterring eines noetherschen Rings wieder noethersch ist.

(b) Sei A noethersch und $\varphi : A \to A$ surjektiv. Dann ist φ injektiv.

Hinweis: Benutzen Sie $\ker \varphi \subset \ker(\varphi^2) \subset \ker(\varphi^3) \dots$.

(c) Sei A ein kommutativer noetherscher Ring, $S \subset A$ eine multiplikative Menge. Dann ist $S^{-1}A$ wieder noethersch.

Hinweis: Die Definition von $S^{-1}A$ ist auf Blatt 6 zu finden.

(d) Sei A ein noetherscher Integritätsring, $t \in A$ eine Nichteinheit. Dann ist $\cap_{n=1}^{\infty}(t^n) = (0)$.

Hinweis: Verwenden Sie iterativ folgende Trivialität: Sei $x \in A$, dann ist $x \in (t)$ oder $x \notin (t)$.

Aufgabe 4

Sei $W = \mathcal{Z}(X^2 - YZ, XZ - X) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$. Zeigen Sie, dass W die Vereinigung von 3 irreduziblen Komponenten ist. Beschreiben Sie diese und finden Sie die zugehörigen Primideale.