Algebra: Blatt 11

Irene Bouw
Michael Eskin

Abgabe: 31.01.2014, vor der Übung

Aufgabe 1
Sei k ein Körper mit $\mathrm{Char}(k) \neq 2$ und $\mathfrak{X} = \mathcal{Z}(Y^2 - X^2(X+1)) \subset \mathbb{A}^2_k$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{X}$ eine Varietät ist. Zeigen Sie außerdem, dass $A := k[\mathfrak{X}] = k[X,Y]/(Y^2 - X^2(X+1))$ der Koordinatenring von $\mathfrak{X}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $t := Y/X \in \mathrm{Quot}(A)$ ganz über A ist und berechnen Sie ein irreduzibles, normiertes Polynom $f \in A[Z]$ mit t als Nullstelle.

(c) Zeigen Sie, dass $B = k[t]$ der ganze Abschluss von A im Quotientenkörper von A ist und schließen Sie, dass B der Koordinatenring einer algebraischen Varietät $\widetilde{\mathfrak{X}}$ ist.

(d) Die Inklusion $A \subset B$ definiert einen Morphismus $\psi : \widetilde{\mathfrak{X}} \to \mathfrak{X}$. Bestimmen Sie alle Punkte $P \in \mathfrak{X}$, sodass $|\psi^{-1}(P)| > 1$. Skizzieren Sie ein Bild von $\mathfrak{X}$ über $\mathbb{R}$ um zu sehen, was an diesen Punkten besonders ist.

Aufgabe 2
Sei k algebraisch abgeschlossen mit $\mathrm{Char}(k) \neq 2$. In der Vorlesung hat man gesehen, dass der ganze Abschluss von $k[X] \subset k(X)$ in $L := k(X)[Y]/(Y^2 - X)$ gerade $k[X,Y]/(Y^2 - X)$ ist. Bestimmen Sie den ganzen Abschluss von $k[1/X] \subset k(X)$ in L!

Aufgabe 3
Finden Sie die Normalisierung der folgenden Ringe:

(a) $k[X,Y]/(Y^3 - X^5)$

(b) $k[X,Y]/(Y^5 - X^{19})$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4
In der folgenden Aufgabe wollen wir eine geometrische Bedeutung in die Noether-Normalisierung bringen.

(a) Es sei B ein Integritätsring, B/A eine endliche Ringerweiterung und $m \subset A$ ein maximales Ideal. Darüberhinaus seien B und A noethersch.

(i) Zeigen Sie, dass $mB \neq B$.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $mB = B$. Nutzen Sie dies und die Tatsache, dass B/A endlich ist aus um, analog zum Beweis von Satz 5.7.3, eine Matrix zu konstruieren. Entwickeln Sie die Determinante der Matrix und schließen Sie, dass $1 \in m$.

(ii) Zeigen Sie, dass es ein $\mathfrak{M} \subset B$ gibt mit $\mathfrak{M} \cap A = m$.

(iii) Seien nun $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r \subset B$ paarweise verschiedene maximale Ideale mit $\mathfrak{M}_i \cap A = m$. Wir definieren $I := \mathfrak{M}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{M}_r$. Zeigen Sie, dass es einen injektiven Ringhomomorphismus

$$k := A/m \to B/I$$

gibt.

(iv) Zeigen Sie, dass $n := \dim_k(B/I) < \infty$.

(v) Benutzen Sie den chinesischen Restsatz um zu schließen, dass es höchstens n verschiedene maximale Ideale $\mathfrak{M} \subset B$ gibt, sodass $\mathfrak{M} \cap A = m$.

(b) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $V \subset \mathbb{A}_k^n$ eine affine algebraische Menge. Zeigen Sie, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass eine surjektive Abbildung $\psi : V \to \mathbb{A}_k^m$ mit der Eigenschaft: $|\psi^{-1}(P)| < \infty$ für alle $P \in \mathbb{A}_k^m$ existiert.

Hinweis: Benutzen Sie die Noether-Normalisierung und Aufgabenteil (a).