Algebra: Blatt 12

Irene Bouw
Michael Eskin

Abgabe: 07.02.2014, vor der Übung

Aufgabe 1

Sei $k = \mathbb{C}$ und $W = \mathcal{Z}(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$, sowie

$$\psi : X \to W, \quad t \mapsto (t^2, t^3).$$

(a) Zeigen Sie: ψ induziert einen k-Algebrahomomorphismus von lokalen Ringen

$$\psi_P^* : \mathcal{O}_{\psi(P),W} \to \mathcal{O}_{P,X}.$$

(b) Zeigen Sie, dass ψ_P^* für alle $P \neq (0,0)$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2

Für einen Ring A definieren wir $\operatorname{MaxSpec} A := \{\text{maximale Ideale von } A\}$. Sei nun k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $V \subset \mathbb{A}^n_k$ eine algebraische Menge und $f \in A := k[V]$ nicht nilpotent. Die Punkte $P \in \mathbb{A}^n_k$ stehen nach dem Hilbertschen Nullstellensatz in $1:1$-Korresponenz zu den maximalen Idealen $m_P \subset k[X_1, \ldots, X_n]$. Wir identifizieren in dieser Aufgabe nun $\mathcal{Z}((f))^c = \mathbb{A}^n_k \backslash \mathcal{Z}((f))$ mit der entsprechenden Menge der maximalen Ideale, d.h.

$$\mathcal{Z}((f))^c = \{m_p \subset k[X_1, \ldots, X_n] \mid f(P) \neq 0\}.$$

Zeigen Sie:

$$\operatorname{MaxSpec}(A[f^{-1}]) = \mathcal{Z}((f))^c.$$

Aufgabe 3

Sei A ein Ring und $f \in A$ nicht nilpotent. Zeigen Sie, dass

$$A[f^{-1}] \simeq A[X]/(fX - 1).$$

Bemerkung: Dies zeigt, dass die Identifikation von $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \backslash \{0\}$ mit $\mathcal{Z}(XY-1) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ aus Blatt 10 Aufgabe 2 natürlich ist. Es ist nämlich auf Ringebene nach dieser Aufgabe $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1) \simeq \mathbb{C}_X[X] \simeq \mathbb{C}[X, X^{-1}]$. Dies sind offensichtlich alle regulären Funktionen auf $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \backslash \{0\}$. Im Allgemeinen definiert man auch den Koordinatenring einer Menge $V \subset \mathbb{A}^n_k$ als den Ring der regulären Funktionen.

Aufgabe 4

Sei A ein noetherscher lokaler Integritätsring der kein Körper ist, $m \subset \mathbb{A}$ ein maximales Ideal und $k = A/m$ der Restklassenkörper. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) A ist ein diskreter Bewertungsring

(ii) m ist ein Hauptideal

(iii) $\dim_k m/m^2 = 1$.