Algebra: Blatt 3

Irene Bouw
Michael Eskin

Abgabe: 15.11.2013, vor der Übung

Aufgabe 1 *(4+6 Punkte)*
Sei K ein Körper mit $\mathrm{Char}(K) \neq 2$.

(a) Sei $L = K(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})$ mit $D_1, D_2 \in K$, wobei weder D_1, D_2 noch $D_1 D_2$ ein Quadrat in K ist. Zeigen Sie, dass L/K galoisch ist und

$$\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

(b) Sei umgekehrt L/K eine Galoiserweiterung mit $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $L = K(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})$ mit $D_1, D_2 \in K$, wobei weder D_1, D_2 noch $D_1 D_2$ ein Quadrat in K ist.

Hinweis: Benutzen Sie den Hauptsatz der Galoistheorie!

Aufgabe 2 *(2+3+2+3 Punkte)*
Es seien $a, b \in \mathbb{Q}$, sodass b kein Quadrat ist und $\alpha = \sqrt{a + \sqrt{b}}$. Weiter sei $L = \mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ biquadratisch (vgl. Aufgabe 1).

(a) Sei $f = \min_{\mathbb{Q}}(\alpha)$ und $\pm\alpha, \pm\tilde{\alpha}$ die vier Nullstellen von f. Zeigen Sie, dass die vier Elemente der Galois-Gruppe Folgendes erfüllen:

$$\varphi_1(\alpha) = \alpha, \quad \varphi_2(\alpha) = -\alpha, \quad \varphi_3(\alpha) = \tilde{\alpha}, \quad \varphi_4(\alpha) = -\tilde{\alpha}.$$

(b) Bestimmen Sie $\varphi_i(\tilde{\alpha})$ für $i = 1, \ldots, 4$.

(c) Zeigen Sie, dass $\varphi_i(\alpha\tilde{\alpha}) = \alpha\tilde{\alpha}$.

(d) Schließen Sie, dass $a^2 - b$ ein Quadrat ist

Anmerkung: Damit haben wir jetzt eine Charakterisierung der biquadratischen Körpererweiterungen der Form $\mathbb{Q}(\sqrt{a + \sqrt{b}})$.

Aufgabe 3 *(3+2+3 Punkte)*
Sei $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom f von α über $\mathbb{Q}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha)$ kein Zerfällungskörper von f ist.

(c) Sei L der Zerfällungskörper von f. Zeigen Sie, dass $[L : \mathbb{Q}] = 8$ ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 *(2+1+3+6 Punkte)*
Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung und sei $\alpha \in L$. Wir definieren die *Norm von* α *von* L *über* K als

$$N_{L/K}(\alpha) := \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(\alpha).$$

(a) Zeigen Sie, dass $N_{L/K}(\alpha) \in K$.

(b) Seien $\alpha, \beta \in L$. Zeigen Sie, dass $N_{L/K}(\alpha\beta) = N_{L/K}(\alpha) N_{L/K}(\beta)$.

(c) Sei $L = K(\sqrt{D})$ eine quadratische Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass $N_{L/K}(a+b\sqrt{D}) = a^2 - Db$.

(d) Sei $\min_K(\alpha) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in K[X]$ das Minimalpolynom von $\alpha \in L$ über K. Sei $n = [L : K]$.

Zeigen Sie: Es gilt $d \mid n$ und es gibt d verschiedene $\sigma_i(\alpha)$ welche n/d-Mal im Produkt $N_{L/K}(\alpha) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(\alpha)$ vorkommen. Schließen Sie, dass $N_{L/K}(\alpha) = (-1)^n a_0^{n/d}$.