Algebra: Blatt 4

Irene Bouw
Michael Eskin

Abgabe: 22.11.2013, vor der Übung

Aufgabe 1 *(2+2+1 Punkte)*
Sei $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ und sei $f = \min_{\mathbb{Q}}(\alpha)$ das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$ (vgl. Aufgabe 3 von Blatt 3). Es bezeichne L den Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$.

(a) Zeigen Sie: Es ist $\mathrm{Gal}(f) \simeq D_4$, wobei D_4 die Diedergruppe mit 8 Elementen ist, d.h. $D_4 = \langle r, s \mid r^4 = s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle$.

(b) Seien $H_1 = \langle r^2 \rangle$ und $H_2 = \langle s \rangle$ zwei Untergruppen von D_4. Bestimmen Sie die Fixkörper $M_i := L^{H_i}$ von L.

(c) Ist $M_i/\mathbb{Q}$ galoisch? Falls ja, was ist die Galoisgruppe?

Aufgabe 2 *(5 Punkte)*
Seien $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, sodass $\mathrm{Char}(K) \nmid n$ (d.h. $\mathrm{Char}(K) = 0$ oder p mit $p \nmid n$). Es gelte weiter, dass K die n-ten Einheitswurzeln enthält. Sei außerdem $a \in K$.

Zeigen Sie: Die Körpererweiterung $K(\sqrt[n]{a})/K$ ist galoisch und die Galoisgruppe ist zyklisch. Zeigen Sie, dass der Grad dieser Körpererweiterung n teilt.

Hinweis: Man überlege sich, dass man auf einfache Art und Weise eine Abbildung $\mathrm{Gal}(K(\sqrt[n]{a})/K) \to \mu_n$ erhält, wobei μ_n die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln bezeichne. Zeigen Sie, dass diese Abbildung ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist. (Vgl. Aufgabe 3 (e))

Bitte wenden!

Aufgabe 3 *(3+1+2+1+1 Punkte)*
Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $G := \mathrm{Gal}(L/K)$. Die Menge $\mathrm{Abb}(L^*, L) := \{f : L^* \to L\}$ ist ein L-Vektorraum. Für $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ definiert die Einschränkung $\sigma|_{L^*} : L^* \to L^*$ einen Gruppenhomomorphismus der Einheitengruppe von L. Wir fassen $\sigma|_{L^*}$ als Element von $\mathrm{Abb}(L^*, L)$ auf und sagen oftmals etwas ungenau, dass σ ein Element von $\mathrm{Abb}(L^*, L)$ ist.

Sei L/K eine Galoiserweiterung mit zyklischer Galoisgruppe $G = \langle\sigma\rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\sigma^0, \sigma, \dots, \sigma^{n-1})$ in $\mathrm{Abb}(L^*, L)$ L-linear unabhängig ist.

Hinweis: In der Literatur heißt dieses Resultat oftmals „lineare Unabhängigkeit von Charakteren“.

(b) Sei $\alpha \in L$ mit $\alpha = \frac{\beta}{\sigma\beta}$. Zeigen Sie, dass

$$N_{L/K}(\alpha) = \prod_{i=0}^{n-1} \sigma^i(\alpha) = 1.$$

(c) Sei nun $\alpha \in L$ mit $N_{L/K}(\alpha) = 1$. Zeigen Sie, dass es ein $\theta \in L$ gibt, sodass

$$\beta := \theta + \alpha\sigma(\theta) + \alpha\sigma(\alpha)\sigma^2(\theta) + \cdots + \alpha\sigma(\alpha)\cdots\sigma^{n-2}(\alpha)\sigma^{n-1}(\theta)$$

ungleich 0 ist.

(d) **(Hilbert 90)** Benutzen Sie $N_{L/K}(\alpha) = 1$ um zu zeigen, dass $\alpha = \frac{\beta}{\sigma\beta}$.

(e) **(Kummer-Theorie)** Nach (d) existiert ein $\beta \in L$ mit $\alpha = \frac{\beta}{\sigma\beta}$. Wir nehmen nun an, dass K eine primitive n-te Einheitswurzel ζ enthält. Wir definieren $\alpha = \zeta^{-1}$. Zeigen Sie, dass $N_{L/K}(\alpha) = 1$ ist. Schließen Sie, dass $L = K(\beta)$ und $\sigma\beta = \zeta\beta$. Schließen Sie, dass inbesondere $\beta^n \in K$.

Aufgabe 4 *(2 Punkte)*
Sei $K = \mathbb{Q}(i)$ und L der Zerfällungskörper von $f = \min_{\mathbb{Q}}(\alpha)$ mit α wie in Aufgabe 1. Zeigen oder widerlegen Sie, dass L/K eine Kummererweiterung ist, d.h. dass es ein $\beta \in L$ wie in Aufgabe 3 (e) gibt mit $\beta^4 \in K$, sodass $L = K(\beta)$ und $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.