Algebra: Blatt 5

Irene Bouw
Michael Eskin

Abgabe: 29.11.2013, vor der Übung

Aufgabe 1 *(1+1+1+1 Punkte)*
Sei $R = \mathbb{R}[X,Y]/I$, wobei $I = (X^2+Y^2-1)$. Sei $x := \bar{X}, y := \bar{Y}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Ideale $(x-1), (y-1)$ sind keine Primideale.

(b) Für $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| > 1$ sind sowohl $(x-a)$ als auch $(y-a)$ maximale Ideale von R.

(c) $(x-a, y-b)$ ist genau dann ein maximales Ideal von R, wenn $a^2+b^2=1$.

(d) Erklären Sie (a),(b) und (c) geometrisch. Genauer: Fertigen Sie eine Skizze der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1=0\}$ und gehen sie die verschiedenen Fälle aus den Aufgaben am Bild durch.

Aufgabe 2 *(2+1+2+2 Punkte)*

(a) Sei $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}R[X]$, also das von $\mathfrak{p}$ in $R[X]$ erzeugte Ideal, ebenfalls ein Primideal ist.

(b) Seien $I, J \subset R$ Ideale und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

$$\text{(i) } IJ \subset \mathfrak{p} \quad \text{(ii) } I \cap J \subset \mathfrak{p} \quad \text{(iii) } I \subset \mathfrak{p} \text{ oder } J \subset \mathfrak{p}.$$

(c) Seien nun $I, J_1, J_2 \subset R$ Ideale. Zeigen Sie, dass aus $I \subset J_1 \cup J_2$ stets $I \subset J_1$ oder $I \subset J_2$ folgt.

(d) In der Situation von (c) sei $\mathfrak{p} \subset R$ noch zusätzlich ein Primideal. Falls $I \subset J_1 \cup J_2 \cup P$, dann gilt bereits $I \subset J_1$ oder $I \subset J_2$ oder $I \subset \mathfrak{p}$.

Aufgabe 3 *(1+2+1+1+1 Punkte)*
Bestimmen Sie alle maximalen Ideale in den folgenden Ringen

$$\mathbb{Z}[X]/(X^2+3,5), \quad \mathbb{Z}[X]/(X^2-3,2X+4), \quad \mathbb{R}[X]/(X^2), \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \quad \mathbb{R}[X]/(X^2+X+1)$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4 *(2+1 Punkte)*
Sei $m \geq 5$ eine quadratfreie ganze Zahl (d.h. in der Primfaktorzerlegung von m tritt eine Primzahl höchstens in einfacher Potenz auf) und sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-m}]$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $2, \sqrt{-m}, 1+\sqrt{-m}$ sind irreduzibel in R.

Hinweis: Benutzen Sie die Norm (vgl. Blatt 3 Aufgabe 4)

(b) R ist nicht faktoriell!

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\sqrt{-m}$ oder $1+\sqrt{-m}$ kein Primelement in R ist.

Aufgabe 5 *(3* Punkte)*
Sei $R = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$, $y := \bar{Y}$ und $x := \bar{X}$. Zeigen Sie, dass R nicht faktoriell ist!

Hinweis: Zeigen Sie, dass y irreduzibel aber nicht prim ist.