Algebra: Blatt 6

Irene Bouw
Michael Eskin

Abgabe: 06.12.2013, vor der Übung

Aufgabe 1 *(2+1+2+2+1+1 Punkte)*
Sei A ein kommutativer Ring mit 1 und $S \subset A$ eine multiplikative Menge (d.h. $1 \in S$ und aus $s, t \in S$ folgt $st \in S$). Wir definieren folgende Relation auf $A \times S$:

$$(a, s) \sim (b, t) \iff \exists u \in S \text{ sodass } u(at - bs) = 0.$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation (das müssen Sie nicht beweisen). Für eine Äquivalenzklasse (a, s) schreibt man auch oft a/s. Man definiert nun

$$S^{-1}A := (A \times S)/\sim$$

und definiert mittels der gewöhnlichen Rechenregeln

$$\frac{a}{s} \pm \frac{b}{t} = \frac{at \pm bs}{st}, \quad \text{und} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

eine Ringstruktur auf $S^{-1}A$. Den so konstruierten Ring nennt man den *Bruchring von A bezüglich S.*

(a) Zeigen Sie, dass die Rechenoperationen wohldefiniert sind und somit $S^{-1}A$ tatsächlich ein Ring ist.

Die Abbildung $\varphi : A \to S^{-1}A$ definiert durch $a \mapsto a/1$ ist ein Ringhomomorphismus (das müssen Sie nicht zeigen). Für ein Ideal $I \subset A$ und definieren wir $\varphi(I) = \varphi(I) \cdot (S^{-1}A) = I \cdot (S^{-1}A)$. Insbesondere ist $\varphi(I)$ hier per Definition ein Ideal!

(b) Für jedes Ideal $J \subset S^{-1}A$ gilt $\varphi(\varphi^{-1}(J)) = J$.

(c) Für jedes Ideal $I \subset A$ gilt

$$\varphi^{-1}(\varphi(I)) = \{a \in A \mid as \in I \text{ für ein } s \in S\}.$$

(d) Falls $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal ist, sodass $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, dann ist $\varphi(\mathfrak{p})$ ebenfalls ein Primideal von $S^{-1}A$.

Sei nun $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Man definiert dann $S := A \backslash \mathfrak{p}$ und man schreibt $A_\mathfrak{p}$ für $S^{-1}A$. Man nennt dies die *Lokalisierung von A in $\mathfrak{p}$*.

(e) Zeigen Sie, dass $A_\mathfrak{p}$ genau ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ besitzt.

(f) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{m}$ aus allen Nichteinheiten besteht, d.h. $\mathfrak{m} = A_\mathfrak{p} \backslash A_\mathfrak{p}^*$.

Bitte wenden!

Aufgabe 2 *(2 Punkte)*
Sei $R = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ und $x := \bar{X}, y := \bar{Y}$. Sei $\mathfrak{m} = (x-a, y-b) \subset R$ maximal (vgl. Blatt 5 Aufgabe 1). Zeigen Sie, dass $\mathfrak{m}R_\mathfrak{m} \subset R_\mathfrak{m}$ ein Hauptideal ist.

Tipp: Wann ist $x-a$ ein Erzeuger von $\mathfrak{m}$?

Aufgabe 3 *(1 Punkte)*
Sei A ein Hauptidealring und $S \subset A$ eine multiplikative Menge mit $0 \notin S$. Zeigen Sie, dass dann $S^{-1}A$ ebenfalls ein Hauptidealring ist.

Aufgabe 4 *(2+1+1+1+1+2 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass das Polynom $X^n + Y^n - 1 \in \mathbb{Z}[X,Y]$ für alle $n \geq 1$ irreduzibel ist.

(b) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Polynome $f = 6X^3 - 12X^2 - 9X + 18$ und $g = 5X^2 - 5X - 10$ in dem Ring $\mathbb{Z}[X]$ (bis auf Assoziiertheit).

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Polynome irreduzibel sind. Zerlegen Sie sie gegebenfalls in irreduzible Faktoren.

(c) $X^3 - X^2Y - XY + Y^2$ in $\mathbb{Q}[X,Y]$.

(d) $Y^4 + X^2 + 1$ in $\mathbb{Q}[X,Y]$.

(e) $Y^4 + X^2 + 1$ in $\mathbb{F}_2[X,Y]$.

(f) $Y^n - 42X^m$ in $\mathbb{Q}[X,Y]$ für $n, m \geq 1$.