Algebra: Blatt 7

Irene Bouw
Michael Eskin

Abgabe: 13.12.2013, vor der Übung

Aufgabe 1 *(3 Punkte)*
Sei R ein Integritätsring und $I \subset R$ ein Ideal. Zeigen Sie: I ist genau dann frei als R-Modul, wenn I ein Hauptideal ist. Gilt die Aussage auch, falls R nicht nullteilerfrei ist?

Aufgabe 2 *(3+3+3 Punkte)*
Ein R-Modul M heißt *torsionsfrei*, falls $M_{\mathrm{tor}} = \{0\}$.

(a) Sei $\mathbb{Q}^+ := \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$ als *multiplikative* abelsche Gruppe. Zeigen Sie: $\mathbb{Q}^+$ ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul. Geben Sie eine Basis an.

(b) Geben Sie für $(\mathbb{Q}, +)$ als $\mathbb{Z}$-Modul ein Erzeugendensystem an.

(c) Zeigen Sie: $(\mathbb{Q}, +)$ ist torsionsfrei, aber nicht frei als $\mathbb{Z}$-Modul.

Aufgabe 3 *(1+1 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie den Torsionsuntermodul M_{tor} des $\mathbb{Z}$-Moduls $M := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

(b) Bestimmen Sie jeweils den Annihilator von M und M_{tor}.

Aufgabe 4 *(3+3 Punkte)*
Sind die folgenden R-Moduln frei? Wenn ja, finden Sie eine Basis!

(a) $W = \{(f, g) \in R^2 \mid Xf - Yg = 0\}$ mit $R = \mathbb{C}[X, Y]$.

(b) $V = R^2/W$ mit R und W wie in (a).