Algebra: Blatt 8

Irene Bouw
Michael Eskin

Abgabe: 20.12.2013, vor der Übung

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie die Elementarteilerzerlegung von

$$M_1 = (\mathbb{Z}/2013\mathbb{Z})^*, \quad M_2 = (\mathbb{Z}/2014\mathbb{Z})^*.$$

Tipp: Verwenden Sie den chinesischen Restsatz!

(b) Bestimmen Sie für $i = 1, 2$ zu jedem Elementarteiler p von M_i den Modul $M_i[p]$.

Tipp: Verwenden Sie ein Computeralgebrasystem!

(c) Bestimmen Sie für $i = 1, 2$ die Zerlegung von M_i in invariante Faktoren.

(d) Bestimmen Sie alle abelschen Gruppen der Ordnung 144 (bis auf Isomorphie).

Aufgabe 2

Sei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis von $\mathbb{Z}^3$ und $V = \langle 2e_1 + 2e_2 + 2e_3, 2e_1 + 2e_2, 2e_1 + 2e_3 \rangle$, sowie $M = \mathbb{Z}^3/V$.

(a) Bestimmen Sie den Rang von M sowie die Elementarteilerteilerzerlegung.

(b) Was ist $\mathrm{Ann}(M)$ und M_{tor}?

Aufgabe 3

Sei R ein Integritätsring. Der *Rang* eines R-Moduls M ist die maximale Anzahl an R-linear unabhängigen Elementen von M. Zeigen Sie:

Ist R ein Integritätsring und $M \subset R$ ein Ideal welches kein Hauptideal ist. Dann ist M ein torsionsfreier R-Modul vom Rang 1 aber M ist nicht frei.

Aufgabe 4

Finden Sie den Rang, sowie die Elementarteilerzerlegung von $M = \mathbb{Z}^3/I$, wobei,

$$I = \langle (7, 5, 2)^t, (3, 3, 0)^t, (13, 11, 2)^t \rangle_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}^3.$$