Algebra: Blatt 9

Irene Bouw
Michael Eskin

Abgabe: 17.01.2014, vor der Übung

Aufgabe 1
Sei k ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Für eine Teilmenge $W \subset \mathbb{A}_k^n$ heißt

$$\bar{W} := \mathcal{Z}(\mathcal{I}(W))$$

der *Zariski-Abschluss* von W. Bestimmen Sie in den folgenden Fällen $\bar{W}$:

(a) $k = \mathbb{R}, n = 2, \quad W := \{(\sin(t), \cos(t) \mid t \in [0, 2\pi) \cap \mathbb{Q}\}$.

(b) $k = \mathbb{R}, n = 2$ und $W := \{(\sin(t), \cos(t) \mid t \in [0, \alpha)$ mit einem $\alpha \in (0, 2\pi)\}$

Bestimmen Sie für die folgenden zwei Mengen sowohl $\mathcal{I}(W)$ als auch $\bar{W}$:

(c) $k = \mathbb{R}, n = 2, \quad W := \{(t, \sin(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(d) $k = \mathbb{F}_3, n = 2, \quad W := \mathbb{A}_{\mathbb{F}_3}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

Aufgabe 2
Sei k algebraisch abgeschlossen und $W \subset \mathbb{A}_k^3$ das Bild der Abbildung

$$p : \mathbb{A}_k^1 \to \mathbb{A}_k^3, \quad t \mapsto (t^2, t^3, t^5).$$

(a) Bestimmen Sie $\mathcal{I}(W)$ und zeigen Sie, dass W eine affine algebraische Menge ist.

(b) Geben Sie einen k-Algebrahomomorphismus $\phi : k[W] \to k[X]$ an, der die Abbildung $p : \mathbb{A}_k^1 \to W$ von oben erzeugt.

Aufgabe 3
Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $W_1, W_2 \subset \mathbb{A}_k^n$ zwei affine algebraische Mengen und $W := W_1 \cup W_2$ die Vereinigung. Zeigen Sie:

(a) Ist $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, dann ist die Abbildung

$$k[W] \to k[W_1] \times k[W_2], \quad f \mapsto (f|_{W_1}, f|_{W_2})$$

ein Ringisomorphismus.

(b) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass (a) falsch ist, wenn $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$.

Aufgabe 4
Seien $f := Y^2 - X^3 - X, g := X^2 + (Y - 1)^2 - 1 \in \mathbb{R}[X, Y]$.

(a) Zeigen Sie: Es gilt $\mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(g) = \{(0, 0); (a, b)\}$ in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, wobei $a > 0$ und a algebraisch über $\mathbb{Q}$.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $\mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(g)$ in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$.