Prof. Dr. Stefan Wewers
Christian Steck
Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 6

Algebraische Zahlentheorie

Die Besprechung erfolgt am Mittwoch, dem 27.11.2013,
um 14:00 Uhr in O28 - 2003.

Aufgabe 1 (5+5+5)

Sei K ein Zahlkörper. Zeigen Sie die folgenden Aussagen über Ideale in $\mathcal{O}_K$:

(a) Ist $\mathfrak{a} \lhd \mathcal{O}_K$ ein Ideal mit $N(\mathfrak{a}) = p$ für eine Primzahl p, so ist $\mathfrak{a}$ ein Primideal und es gilt $p \in \mathfrak{a}$.

(b) Für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ gibt es nur endlich viele Primdeale $\mathfrak{p}$ in $\mathcal{O}_K$ mit $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$.

(c) Für $a \in \mathbb{N}$ gibt es nur endlich viele Ideale $\mathfrak{a} \lhd \mathcal{O}_K$ mit $N(\mathfrak{a}) = a$.

Aufgabe 2 (3+2+2+3)

Sei $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$ und $\theta := \frac{1+\sqrt{-7}}{2}$. Wir wollen in dieser Aufgabe die Primidealzerlegung eines Ideals in $\mathcal{O}_K$ bestimmen.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p} := (11, \theta - 5)$ ein Primideal von $\mathcal{O}_K$ ist.

(b) Bestimmen Sie eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathfrak{p}^{-1}$.

(c) Ist $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal?

(d) Bestimmen Sie die Primidealzerlegung von (22) in $\mathcal{O}_K$.

Aufgabe 3 (5)

Sei R ein kommutativer Ring mit 1, I,J Ideale von R mit $I + J = R$. Zeigen Sie:

$$I \cdot J = I \cap J$$