Universität Ulm

Prof. Dr. S. Wewers
WS 2013/2014

Elemente der Algebra: Blatt 1

A1. (a) Seien $\tau, \sigma \in \mathcal{S}_5$ mit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Schreiben Sie σ, τ, $\sigma\tau$, $\tau\sigma$ in Zykelschreibweise und bestimmen Sie die Ordnung[1] dieser Elemente. (5)

(ii) Zeigen Sie, dass σ und τ konjugiert sind, d.h. zeigen Sie, dass es ein $\epsilon \in \mathcal{S}_5$ gibt mit $\sigma = \epsilon\tau\epsilon^{-1}$. (5)

(b) Seien τ, σ zwei Permutationen in $\mathcal{S}_n$. Die Permutationen seien so gewählt, dass die Menge der Zahlen die in der Zykelschreibweise von τ vorkommt und die Menge dieser Zahlen für σ disjunkt sind. Zeigen Sie, dass τ und σ kommutieren. (10)

A2. Sei $G = S_3$ die Gruppe der Permutationen auf 3 Elementen.

(a) Zeigen Sie, dass S_3 eine nicht-abelsche Gruppe mit 6 Elementen ist, bestimmen Sie die Multiplikationstafel von S_3 und die Ordnung aller Elemente. (10)

(b) Zeigen Sie, dass man S_3 nicht als Untergruppe von $M_{2,2}(\mathbb{R})$, also der Gruppe der 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$, auffassen kann. Zeigen Sie also, dass es keine Untergruppe von $M_{2,2}(\mathbb{R})$ mit 6 Elementen gibt, deren Multiplikationstafel mit der Multiplikationstafel von S_3 übereinstimmt. (Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis, der auf folgender Überlegung basiert: Welche Ordnung haben die Element in S_3? Welche Ordnung haben aber die Elemente von $M_{2,2}(\mathbb{R})$?) (10)

(c) Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass man S_3 als Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, also der Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$, auffassen kann. (Hinweis: Welche Matrix der Ordnung 1 gibt es? Welche Matrizen haben Ordnung 2 und 3, d.h. für welche Matrizen A gilt $A^2 = E$ bzw. $A^3 = E$?) (0)

Die Aufgaben auf diesem Übungsblatt können noch nicht abgegeben werden und werden auch noch nicht gewertet. Ab dem Blatt 2 wird es möglich sein, Lösungen zur Korrektur abzugeben. Genauere Erläuterungen hierzu folgen auf dem Übungsblatt 2 und in der Übung.

[1] Den Begriff der Ordnung sollten Sie bereits in der Linearen Algebra kennengelern haben. Hier noch einmal zur Erinnerung: Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe $e \in G$ das neutrale Element. Gibt es für $a \in G$ eine natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $a^n = e$, dann heißt das kleinste solche n die Ordnung von a. Gibt es kein solches n, so legt man fest, dass das Element Ordnung ∞ besitzt. Beispielsweise hat das neutrale Element immer Ordnung 1.