Universität Ulm

Prof. Dr. S. Wewers
WS 2013/2014

Elemente der Algebra: Blatt 10

A1. Sei $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ die Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen mit Einträgen $\mathbb{Q}$. Sei H die von

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe von G.

(a) Bestimmen Sie die Mächtigkeit von H. (0)

(b) Sei (0)

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G.$$

Beschreiben Sie die Klasse von A in G/H indem Sie die Elemente auflisten. Beschreiben sie genauso die Klasse von A in $H\backslash G$.

(c) Machen Sie sich folgende Aussage noch einmal klar, die Ihnen bereits aus der Übung bekannt vorkommen sollte: Sei G eine Gruppe, H eine Untergruppe von G und $a, b \in G$. Dann liegen a, b in der selben Rechtsnebenklasse von H in G genau dann wenn $a^{-1}b \in H$. (0)

Zeigen Sie eine analoge Aussage für Linksnebenklassen.

(d) Verwenden Sie die Aussage aus der vorigen Teilaufgabe, um zu untersuchen für welche $A \in G$ die Links- und Rechtsnebenklasse von A übereinstimmen.[1] (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $AH = HA$ genau dann, wenn $AH \subseteq HA$. Da AH nur aus zwei Elementen besteht und offensichtlich $AE_2 \in HA$ gilt, ist nur zu untersuchen, wann das andere Element $B \in AH$ in der Rechtsnebenklasse von A liegt; wann dies der Fall ist lässt sich mit voriger Teilaufgabe beschreiben.) (0)

A2. Sei F ein Körper, $G := \mathrm{GL}_2(F)$ und $X := (F^2)\backslash\{0\}$ der zweidimensionale Vektorraum über F ohne den Nullpunkt, wobei wir die Vektoren als Zeilenvektoren auffassen wollen. (Sie können zunächst auch $F = \mathbb{Q}$ annehmen; dies ändert die Aufgabe nicht entscheidend.)

(a) Sei $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(X)$ definiert als $\varphi(A)(x) = xA$ (Matrixmultiplikation von rechts). Zeigen Sie, dass φ eine Gruppenwirkung definiert. (0)

(b) Warum liefert die naheliegendere Definition $\varphi(A)(x) = Ax$ für Spaltenvektoren keine Gruppenwirkung? (0)

(c) Zeigen Sie, dass die Wirkung von G auf X transitiv ist, das heißt, dass es genau eine Bahn gibt. (Hinweis: Zeigen Sie, dass alle Elemente auf der Bahn liegen, auf der der Vektor $(1\,1)$ liegt.) (0)

(d) Sei nun $F = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen.

  (i) Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Stabilisatoren G_x für alle $x \in X$.

  (ii) Geben Sie einen Gruppenisomorphismus von G nach S_3 an.

Die Aufgaben auf diesem Blatt werden nicht gewertet. Wenn Sie wollen können sie aber korrigiert werden.
Wenden Sie sich dafür in der ersten Vorlesungswoche an `julian.rueth@uni-ulm.de`.

[1] Dies ist natürlich nicht der geschickteste Weg dies zu untersuchen; trotzdem sollten Sie versuchen die Aufgabe auf diesem Weg zu lösen.