Lösungen Elemente der Algebra: Blatt 10

A1. Sei $G = \text{GL}_2(\mathbb{Q})$ die Gruppe der invertierbaren 2×2 -Matrizen mit Einträgen $\mathbb{Q}$. Sei H die von

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe von G .

- (a) Bestimmen Sie die Mächtigkeit von H . (0)

Lösung: Die Matrix ist ihre eigene Inverse und somit ist die Mächtigkeit 2.

- (b) Sei (0)

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G.$$

Beschreiben Sie die Klasse von A in G/H indem Sie die Elemente auflisten. Beschreiben sie genauso die Klasse von A in $H \backslash G$.

Lösung: Es ist dies

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \right\}$$

bzw.

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \right\}.$$

- (c) Machen Sie sich folgende Aussage noch einmal klar, die Ihnen bereits aus der Übung bekannt vorkommen sollte: Sei G eine Gruppe, H eine Untergruppe von G und $a, b \in G$. Dann liegen a, b in der selben Rechtsnebenklasse von H in G genau dann wenn $a^{-1}b \in H$. (0)

Zeigen Sie eine analoge Aussage für Linksnebenklassen.

Lösung: Ist $aH = bH$, dann ist $a^{-1}bH = H$. Für Linksnebenklassen lautet das Kriterium $ab^{-1} \in H$.

- (d) Verwenden Sie die Aussage aus der vorigen Teilaufgabe, um zu untersuchen für welche $A \in G$ die Links- und Rechtsnebenklasse von A übereinstimmen.¹ (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $AH = HA$ genau dann, wenn $AH \subseteq HA$. Da AH nur aus zwei Elementen besteht und offensichtlich $AE_2 \in HA$ gilt, ist nur zu untersuchen, wann das andere Element $B \in AH$ in der Rechtsnebenklasse von A liegt; wann dies der Fall ist lässt sich mit voriger Teilaufgabe beschreiben.) (0)

Lösung: Aus $AH \subseteq HA$ folgt Gleichheit, da beides Mengen mit zwei Elementen sind. Sei nun

$$B = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}.$$

Es ist also

$$B^{-1} = \frac{1}{bc - ad} \begin{pmatrix} c & -a \\ -d & b \end{pmatrix}.$$

Und somit

$$AB^{-1} = \frac{1}{bc - ad} \begin{pmatrix} ac - bd & b^2 - a^2 \\ c^2 - d^2 & bd - ac \end{pmatrix}.$$

Man rechnet nach, dass dies der Erzeuger von H ist, falls $b = c$ und $a = d$.

¹Dies ist natürlich nicht der geschickteste Weg dies zu untersuchen; trotzdem sollten Sie versuchen die Aufgabe auf diesem Weg zu lösen.

A2. Sei F ein Körper, $G := \text{GL}_2(F)$ und $X := (F^2) \setminus \{0\}$ der zweidimensionale Vektorraum über F ohne den Nullpunkt, wobei wir die Vektoren als Zeilenvektoren auffassen wollen. (Sie können zunächst auch $F = \mathbb{Q}$ annehmen; dies ändert die Aufgabe nicht entscheidend.)

- (a) Sei $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(X)$ definiert als $\varphi(A)(x) = xA$ (Matrixmultiplikation von rechts). (0)
Zeigen Sie, dass φ eine Gruppenwirkung definiert.

Lösung: Es ist $\varphi : A \mapsto (x \mapsto xA)$ und somit $\varphi(AB)(x) = x(AB) = (xA)B = \varphi(B) \circ \varphi(A)(x)$. Dies ist leider keine Gruppenwirkung, wie obiges Argument auch zeigt.

- (b) Warum liefert die naheliegendere Definition $\varphi(A)(x) = Ax$ für Spaltenvektoren keine (0)
Gruppenwirkung?

Lösung: ~~In obiger Rechnung vertauschen A und B dann nicht richtig.~~ Dies ist eine Gruppenwirkung. Für die nachfolgenden Aufgaben macht dies aber keinen Unterschied. In der Vorlesung wurde eine Gruppenwirkung definiert als Gruppenwirkung *von links*. Man kann dies aber genauso *von rechts* definieren. Anschaulich fordert man statt der Rechenregel $(gh)x = g(hx)$, dass $x(gh) = (xg)h$ gilt. Formal entspricht dies einer Abbildung $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(X)$, welche $\varphi(gh) = \varphi(h) \circ \varphi(g)$ erfüllt (dies ist natürlich dann kein Gruppenhomomorphismus mehr). Um zu sehen, dass Gruppenwirkungen von rechts im Prinzip nichts anderes als Gruppenwirkungen von links sind, macht man sich klar, dass die diese Bedingung äquivalent ist zu der Forderung, dass $\varphi' : G \rightarrow \text{Aut}(X), g \mapsto \varphi(g^{-1})$ eine Gruppenwirkung definiert. Insbesondere beweist man mit dieser äquivalenten Formulierung schnell analoge Versionen sämtlicher Aussagen über Gruppenwirkungen (von links) auch für Gruppenwirkungen von rechts.

- (c) Zeigen Sie, dass die Wirkung von G auf X transitiv ist, das heißt, dass es genau eine (0)
Bahn gibt. (Hinweis: Zeigen Sie, dass alle Elemente auf der Bahn liegen, auf der der Vektor $(1\ 1)$ liegt.)

Lösung: Es ist $(1\ 1) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = (a\ b)$ falls a oder b von 0 verschieden sind. Andernfalls liefert die Matrix $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} b & 0 \\ b & -b \end{pmatrix}$ das Gewünschte.

- (d) Sei nun $F = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen.

- (i) Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Stabilisatoren G_x für alle $x \in X$.

Lösung: Für $x = (1\ 0)$ gilt $xA = x$ falls $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$. In G gibt es genau zwei Matrizen von dieser Form. Für $x = (0\ 1)$ gilt $xA = x$ falls $A = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. In G gibt es genau zwei Matrizen von dieser Form. Für $x = (1\ 1)$ gilt $xA = x$ falls $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (ii) Geben Sie einen Gruppenisomorphismus von G nach S_3 an.

Lösung: Es genügt einen Gruppenhomomorphismus auf Erzeugern anzugeben, wenn dies eine wohldefinierte Abbildung liefert. Man setzt also $\varphi : A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (1\ 2), B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (1\ 3)$. Dies ist eine wohldefinierte Abbildung, denn die Gleichungen, die in G gelten, d.h., $A^2 = E, B^2 = E, ABA = BAB$ (diese Gleichungen legen G vollständig fest!) gelten auch nach Anwendung von φ , d.h., $\varphi(A)^2 = E, \varphi(B)^2 = E, \varphi(A)\varphi(B)\varphi(A) = \varphi(B)\varphi(A)\varphi(B)$. Es ist dies ein Gruppenisomorphismus, da dies auch gerade die Gleichungen sind, die S_3 definieren.