
Elemente der Algebra: Blatt 11

A1. Welche der folgenden Ideale I sind Hauptideale von R ? Finden Sie gegebenenfalls einen Erzeuger des Hauptideals.

(a) $R = \mathbb{R}[x], I = \text{Kern}(\varphi)$, wobei $\varphi : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{C}, f(x) \mapsto f(1+i)$ (5)

(b) $R = \mathbb{Z}[i], I = (3+i, 5)$ (5)

(c) $R = \mathbb{Z}[x], I = (2, x)$ (5)

(d) $R = \mathbb{Q}, I = (3/7, 5/11)$ (5)

A2. Seien $f := x^3 + x + 1$ und $g := x^2 + 1$ Polynome in $\mathbb{Q}[x]$.

- (a) Bestimmen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von f und g und eine Darstellung (10)

$$\text{ggT}(f, g) = Af + Bg.$$

- (b) Sei $I := (f)$, $K := \mathbb{Q}[x]/I$ und $\alpha := x + I \in K$. Finden Sie ein Element $\beta \in K$, sodass $\beta(\alpha^2 + 1) = 1 + I$. (Hinweis: Verwenden Sie die erste Teilaufgabe.) (10)