Universität Ulm

Prof. Dr. S. Wewers
WS 2013/2014

Lösungen Elemente der Algebra: Blatt 11

A1. Welche der folgenden Ideale I sind Hauptideale von R? Finden Sie gegebenenfalls einen Erzeuger des Hauptideals.

(a) $R = \mathbb{R}[x], I = \mathrm{Kern}(\varphi)$, wobei $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}, f(x) \mapsto f(1+i)$ (5)

Lösung: R ist ein Hauptidealring, somit ist I ein Hauptideal. I enthält das Ideal, welches von $x^2 - 2x + 2$ erzeugt wird. Man rechnet nach, dass I von diesem Element erzeugt wird (vgl. Übung).

(b) $R = Z[i], I = (3+i, 5)$ (5)

Lösung: R ist euklidisch und somit Hauptidealring, also ist I ein Hauptideal. I wird erzeugt vom größten gemeinsamen Teiler von $3+i$ und 5. Dieser berechnet sich zu $2-i$.

(c) $R = Z[x], I = (2, x)$ (5)

Lösung: Angenommen I wäre ein Hauptideal, also $I = (f)$ mit $f \in R$, dann gäbe es $g \in R$ mit $gf = 2$ und $h \in R$ mit $hf = x$. Schreibe $f = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i$ mit $a_N \neq 0$ und $g = \sum_{i=0}^{M} b_i x^i$ mit $b_M \neq 0$. Da $gf = a_N b_N x^{M+N} + \cdots + a_0 b_0$ ist $M = N = 0$ und $a_0 b_0 = 2$, also $f \in \{-2, -1, 1, 2\}$. Schreibe $h = \sum_{i=0}^{K} c_i x^i$. Dann ist $x = hf = \sum_{i=0}^{K} a_0 c_i x^i$, also $h = x/a_0$. Es ist also $f = \pm 1$. Da $(-1) = R = (1)$ sei o.B.d.A. $f = 1$. Es ist aber $(1) \neq I$, denn sonst gäbe es $g, h \in R$ mit $1 = 2g + xh$. (Schreibt man g, h wieder wie oben und betrachtet die Konstante diese Ausdrucks, so gilt $1 = 2b_0$.)

(d) $R = \mathbb{Q}, I = (3/7, 5/11)$ (5)

Lösung: Es ist $I = R = (1)$ (da ein Körper nur die Ideale (0) und (1) besitzt).

A2. Seien $f := x^3 + x + 1$ und $g := x^2 + 1$ Polynome in $\mathbb{Q}[x]$.

(a) Bestimmen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von f und g und eine Darstellung (10)

$$\mathrm{ggT}(f, g) = Af + Bg.$$

Lösung: Es ist $1 = f - xg$.

(b) Sei $I := (f)$, $K := \mathbb{Q}[x]/I$ und $\alpha := x + I \in K$. Finden Sie ein Element $\beta \in K$, sodass $\beta(\alpha^2 + 1) = 1 + I$. (Hinweis: Verwenden Sie die erste Teilaufgabe.) (10)

Lösung: Sei $\beta = -\alpha$, dann ist $\beta(\alpha^2+1) = -x(x^2+1) + I = -x^3 - x + I = 1 + I$.