Lösungen Elemente der Algebra: Blatt 12

A1. Welche der folgenden Polynome f sind irreduzibel über dem Grundkörper K ?

(a) $K = \mathbb{Q}, f = x^4 + 6x + 3$ (5)

Lösung: f ist nach dem Eisensteinkriterium für $p = 3$ irreduzibel.

(b) $K = \mathbb{Q}, f = x^4 + x^3 + x - 1$ (5)

Lösung: Es ist f irreduzibel genau dann, wenn es irreduzibel über $\mathbb{Z}$ ist. Dort kann f keine Nullstelle haben, denn es müsste gelten $x(x^3 + x^2 + 1) = 1$. Sollte f reduzibel sein, dann in der Form

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + a'x + b') = x^4 + (a + a')x^3 + (aa' + b + b')x^2 + (ab' + a'b)x + bb'.$$

Somit ist $bb' = -1$ also $b = -b' = \pm 1$. Ferner folgt aus $0 = aa' + b + b' = aa'$, $a = 0$ oder $a' = 0$. Es bleiben also im Prinzip nur noch vier Möglichkeiten für a, a', b, b' und durch ausprobieren findet man $f = (x^2 + 1)(x^2 + x - 1)$.

(c) $K = \mathbb{R}, f = y^2 - x^3 - 1$ (5)

Lösung: Mit dem Eisensteinkriterium für $p = x - 1$ ist f irreduzibel.

(d) $K = \mathbb{F}_2, f = x^4 + x^2 + 1$ (5)

Lösung: f hat keine Nullstellen. Ein Koeffizientenvergleich wie in der zweiten Teilaufgabe liefert $f = (x^2 + x + 1)^2$.

A2. Für ein Polynom $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ in $\mathbb{Z}[x]$ sei $\varphi(f) := \text{ggT}(a_0, \dots, a_n)$. Zeigen Sie, dass für $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ gilt $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$. (Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für $\varphi(f) = \varphi(g) = 1$. Folgen Sie dazu dem Beweis des Lemmas von Gauss.) (20)

Lösung: Sei $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ mit $\varphi(f) = \varphi(g) = 1$. Schreibe $f = \sum a_i x^i$, $g = \sum b_j x^j$. Angenommen es gäbe p prim, sodass $p \mid \varphi(fg)$. Dann gibt es jedoch größte i_0, j_0 sodass $p \nmid a_{i_0}$, $p \nmid b_{j_0}$. Der Koeffizient von $x^{i_0+j_0}$ in fg ist $\sum_{i+j=i_0+j_0} a_i b_j$ außer dem Koeffizienten $a_{i_0} b_{j_0}$ werden alle $a_i b_j$ von p geteilt, denn entweder ist $i > i_0$ oder $j > j_0$. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Annahme, denn nun würde p nicht den Koeffizienten von $x^{i_0+j_0}$ teilen.

Für den allgemeinen Fall setze $a = \varphi(f), b = \varphi(g)$. Dann ist $\varphi(f/a) = 1 = \varphi(g/b)$. Somit ist $\varphi(\frac{fg}{ab}) = 1$ und somit $\varphi(fg) = \varphi(ab \frac{fg}{ab}) = ab \varphi(\frac{fg}{ab}) = ab$.