UNIVERSITÄT ULM

Prof. Dr. S. Wewers
WS 2013/2014

Lösungen Elemente der Algebra: Blatt 13

A1. Untersuchen Sie in den folgenden Fällen, ob $\alpha \in L$ algebraisch über K ist **und bestimmen Sie gegebenenfalls das Minimalpolynom von** α.

(a) $K = \mathbb{Q}, L = \mathbb{C}, \alpha = 2\pi i$ (Hinweis: Verwenden Sie, dass π transzendent über $\mathbb{Q}$ ist.) (5)

Lösung: Angenommen α wäre algebraisch, dann gäbe es ein normiertes Polynom $f = \sum a_i x^i \in \mathbb{Q}[x]$ mit $f(\alpha) = 0$. Somit ist auch $f^4 \in \mathbb{Q}[x]$ ein normiertes Polynom mit $f^4(\alpha) = 0$. Mit anderen Worten, man kann annehmen, dass das Polynom f einen Grad n hat, der durch vier teilbar ist. Es ist also $\sum a_i \alpha^i = 2^n \pi^n + \sum_{i<n} a_i \alpha^i$. Teilt man diesen Ausdruck durch 2^n und nimmt den Realteil, erhält man $\pi^n + \sum_{i<n} b_i \pi^i = 0$ mit neuen Koeffizienten $b_i \in \mathbb{Q}$. Damit wäre π algebraisch, Widerspruch.

(b) $K = \mathbb{R}, L = \mathbb{C}, \alpha = 2\pi i$ (5)

Lösung: Es ist $\alpha^2 + 4\pi^2 = 0$; somit α algebraisch. Dies ist das Minimalpolynom, da $\alpha \notin K$.

(c) $K = \mathbb{Q}, L = \mathbb{R}, \alpha = 1 + 2^{1/3}$ (5)

Lösung: Es ist $(\alpha - 1)^3 = 2$; multipliziert man den linken Term aus, sieht man, dass α algebraisch ist. Warum ist $x^3 - 3x^2 - 3x - 3$ das Minimalpolynom? Hätte das Minimalpolynom kleineren Grad, müsste es dieses Polynom teilen; das Polynom ist aber irreduzibel (Eisenstein-Kriterium).

(d) $K = \mathbb{Q}, L = \mathbb{R}, \alpha$ sei die positive Nullstelle von $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$. (5)

Lösung: α ist algebraisch. Ist f das Minimalpolynom? Es ist $f = (x+1)(x^2 - 3)$ und somit $\alpha + 1 = 0$ (was nicht sein kann) oder $\alpha^2 - 3 = 0$. Zweiteres ist das Minimalpolynom da irreduzibel (Eisenstein-Kriterium).

A2. Sei $f := x^3 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist. (4)

Lösung: f ist über $\mathbb{Z}$ irreduzibel, da es keine Nullstelle hat, denn sonst würde gelten $x(x^2 + 1) = -1$. Mit dem Lemma von Gauss ist f irreduzibel.

(b) Sei $L := K[\theta]$ der Stammkörper von f über $\mathbb{Q}$, wobei θ die durch die Konstruktion aus der Vorlesung gegebene Nullstelle von f ist. Sei $\alpha := \theta^2 + 1$.

(i) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$. (8)

Lösung:

Lösung 1: Man berechnet $\alpha^2 = \theta^4 + 2\theta^2 + 1 = \theta^2 - \theta + 1$ und $\alpha^3 = \theta^2 - \theta + 2$. Für welche $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ist $\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$? Man rät die Koeffizienten oder multipliziert aus zu $(a+b)\theta^2 + (-a)\theta + a + b + c = -\theta^2 + \theta - 2$; man löst also das lineare inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und erhält $a = -1, b = 0, c = -1$ und also das Polynom $g(x) = x^3 - x^2 - 1$ mit $g(\alpha) = 0$. Da g irreduzibel ist, ist dies das Minimalpolynom.

Lösung 2: Man identifiziert L mit dem $\mathbb{Q}^3$ mit Basis $1, \theta, \theta^2$. Sei φ der Endomorphismus *Multiplikation mit* α; dieser wird dann von der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben (denn $\alpha = \theta^2 + 1$, $\alpha\theta = -1$, $\alpha\theta^2 = -\theta$). Das Minimalpolynom dieser Matrix ist $x^3 - x^2 - 1$. D.h. $(\varphi^3 - \varphi^2 - \mathrm{id})(y) = 0$ für alle $y \in L$. Insbesondere gilt dies für $y = 1$, d.h. es ist $\alpha^3 - \alpha^2 - 1 = 0$.

(ii) Bestimmen Sie α^{-1} als Polynom in θ. Finden Sie also ein Polynom $g \in \mathbb{Q}[x]$, sodass $\alpha^{-1} = g(\theta)$. (8)

Lösung: Sei $g = ax^2 + bx + c$ dieses Polynom. Dann ist also $1 = g(\theta)\alpha = a\alpha\theta^2 + b\alpha\theta + c\alpha$. Wie oben stellt man wieder ein Gleichungssystem und löst $b = -1$, also $-\theta\alpha = 1$.