Universität Ulm

Prof. Dr. S. Wewers
WS 2013/2014

Elemente der Algebra: Blatt 14

A1. Sei $\zeta_9 := e^{\frac{2\pi i}{9}} = \cos(2\pi/9) + i\sin(2\pi/9)$. In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass ζ_9 Nullstelle des Polynoms $f = x^6 + x^3 + 1$ ist. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass f irreduzibel ist.

(a) Zeigen Sie, dass gilt $\zeta_9^3 + \zeta_9^{-3} + 1 = 0$. (5)

(b) Sei $\alpha := \zeta_9 + \zeta_9^{-1}$. Zeigen Sie, dass α reell ist und Nullstelle eines normierten Polynoms $g \in \mathbb{Q}[x]$ vom Grad 3. (Hinweis: Benutzen Sie die erste Teilaufgabe.) (5)

(c) Zeigen Sie, dass das Polynom g aus der vorigen Teilaufgabe irreduzibel ist. (5)

(d) Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(\zeta_9) : \mathbb{Q}] = 6$ gilt und folgern Sie, dass f irreduzibel ist. (Hinweis: Benutzen Sie die vorigen beiden Teilaufgaben und den Satz aus der Vorlesung über die Multiplikativität von Körpererweiterungsgraden, d.h. Satz 4.2.10 aus dem Bouw-Skript.) (5)

A2. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch. Begründen Sie.

(a) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit α transzendent über $\mathbb{Q}$ und $\beta = f(\alpha)$ für ein $f \in \mathbb{Q}[x]$. Dann ist β transzendent über $\mathbb{Q}$. (5)

(b) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit β transzendent über $\mathbb{Q}$ und $\beta = f(\alpha)$ für ein $f \in \mathbb{Q}[x]$. Dann ist α transzendent über $\mathbb{Q}$. (5)

(c) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ transzendent über $\mathbb{Q}$. Dann ist α^{-1} transzendent über $\mathbb{Q}$. (5)

(d) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ transzendent über $\mathbb{Q}$. Dann ist $\alpha\beta$ transzendent über $\mathbb{Q}$. (5)

A3. **Zusatzaufgabe**: Sei K ein Körper, $f \in K[x]$ irreduzibel und L/K eine endliche Körpererweiterung. Nehmen Sie an, dass $[L : K]$ teilerfremd ist zum Grad von f. Zeigen Sie, dass dann f auch über L irreduzibel ist. (+20)

Abgabe bitte nur zu zweit am 3.2.2014 in der Übung. Beschriften Sie ihre Abgabe mit Namen und Matrikelnummer (oder SLC-Namen) beider Studenten. **Achten Sie auf einen ausreichenden Seitenrand für die Korrektur.**