Universität Ulm

Prof. Dr. S. Wewers
WS 2013/2014

Lösungen Elemente der Algebra: Blatt 14

A1. Sei $\zeta_9 := e^{\frac{2\pi i}{9}} = \cos(2\pi/9) + i\sin(2\pi/9)$. In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass ζ_9 Nullstelle des Polynoms $f = x^6 + x^3 + 1$ ist. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass f irreduzibel ist.

(a) Zeigen Sie, dass gilt $\zeta_9^3 + \zeta_9^{-3} + 1 = 0$. (5)

Lösung: Es ist $\zeta_9^3 + \zeta_9^{-3} = \exp(\frac{1}{3}2\pi i) + \exp(\frac{-1}{3}2\pi i) = 2\cos(2\pi/3) = -1$.

(b) Sei $\alpha := \zeta_9 + \zeta_9^{-1}$. Zeigen Sie, dass α reell ist und Nullstelle eines normierten Polynoms $g \in \mathbb{Q}[x]$ vom Grad 3. (Hinweis: Benutzen Sie die erste Teilaufgabe.) (5)

Lösung: Es ist $\alpha = 2\cos(2\pi/9)$ und somit reell. Es ist $\alpha^3 = \zeta_9^3 + 3\zeta_9 + 3\zeta_9^{-1} + \zeta_9^{-3}$ und somit $\alpha^3 - 3\alpha - 1 = 0$.

(c) Zeigen Sie, dass das Polynom g aus der vorigen Teilaufgabe irreduzibel ist. (5)

Lösung: $g(x) = x^3 - 3x - 1$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$, denn sonst hätte es auch eine in $\mathbb{Z}$, was nicht sein kann, denn dann wäre $x(x^2 - 3) = 1$.

(d) Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(\zeta_9) : \mathbb{Q}] = 6$ gilt und folgern Sie, dass f irreduzibel ist. (Hinweis: Benutzen Sie die vorigen beiden Teilaufgaben und den Satz aus der Vorlesung über die Multiplikativität von Körpererweiterungsgraden, d.h. Satz 4.2.10 aus dem Bouw-Skript.) (5)

Lösung: Es ist $[\mathbb{Q}(\alpha) : Q] = 3$, da g, das Minimalpolynom von α, Grad 3 hat. Außerdem ist $[\mathbb{Q}(\alpha)(\zeta_9) : \mathbb{Q}(\alpha)] = 2$, denn $\zeta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ ($\zeta_9 \notin \mathbb{R}$, aber $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{R}$) und $\zeta^2 = e^{\frac{2}{9}2\pi i} = \alpha^2 - 2$. Somit ist $[\mathbb{Q}(\zeta_9) : \mathbb{Q}] = 6$. Der Grad der Erweiterung stimmt mit dem Grad des Minimalpolynoms von ζ_9 überein und somit muss f das Minimalpolynom sein und insbesondere irreduzibel.

A2. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch. Begründen Sie.

(a) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit α transzendent über $\mathbb{Q}$ und $\beta = f(\alpha)$ für ein $f \in \mathbb{Q}[x]$. Dann ist β transzendent über $\mathbb{Q}$. (5)

Lösung: Falsch; zum Beispiel nicht für $f = 0$.

(b) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit β transzendent über $\mathbb{Q}$ und $\beta = f(\alpha)$ für ein $f \in \mathbb{Q}[x]$. Dann ist α transzendent über $\mathbb{Q}$. (5)

Lösung: Richtig. Angenommen α wäre algebraisch, dann wäre $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ und somit algebraisch.

(c) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ transzendent über $\mathbb{Q}$. Dann ist α^{-1} transzendent über $\mathbb{Q}$. (5)

Lösung: Richtig. Angenommen $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ wäre das Minimalpolynom von α^{-1}, d.h. $\sum_{i=0}^n a_i\alpha^{-i} = 0$, dann wäre $\sum_{i=0}^n a_i\alpha^{n-i}/a_0 = 0$ ein Minimalpolynom für α.

(d) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ transzendent über $\mathbb{Q}$. Dann ist $\alpha\beta$ transzendent über $\mathbb{Q}$. (5)

Lösung: Falsch, π und π^{-1} sind transzendent, nicht aber deren Produkt.

A3. **Zusatzaufgabe**: Sei K ein Körper, $f \in K[x]$ irreduzibel und L/K eine endliche Körpererweiterung. Nehmen Sie an, dass $[L : K]$ teilerfremd ist zum Grad von f. Zeigen Sie, dass dann f auch über L irreduzibel ist. (+20)

Lösung: Angenommen f wäre nicht irreduzibel über L (und somit $\deg f > 1$). Sei $g \in L[x]$ ein Faktor von f mit $1 \leq \deg g < \deg f$. Betrachte den Stammkörper $M = L[\theta]$ wobei

θ eine Nullstelle von g ist. Es ist also M/K endlich vom Grad $[M : L][L : K]$ und $K(\theta)/K$ endlich vom Grad $\deg f$. Nach der Multiplikationsformel ist $M/K(\theta)$ vom Grad $[M : L][L : K]/\deg f$. Es teilt aber $\deg f$ nicht $[M : L] = \deg g$; nach Annahme ist der Grad von $M/K(\theta)$ keine natÜrliche Zahl; Widerspruch.