
Elemente der Algebra: Blatt 2

A1. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Gruppe A_n erzeugt wird von den Dreizykeln der Form $(1\ 2\ x)$ mit $x \in \{3, \dots, n\}$.

Sei hierzu B_n die Untergruppe von $\mathcal{S}_n$, die erzeugt wird von $\{(1\ 2\ x) : x \in \{3, \dots, n\}\}$. Die Aufgabe ist also zu zeigen, dass $A_n = B_n$.

(a) Zeigen Sie, dass die Elemente der Form $(1\ x\ 2)$ mit $x \in \{3, \dots, n\}$ in B_n enthalten sind. (4)

(b) Zeigen Sie, dass die Elemente der Form $(1\ x)(2\ y)$ mit $x, y \in \{3, \dots, n\}$ und $x \neq y$ in B_n enthalten sind. (4)

(c) Zeigen Sie nun, dass die Element der Form $(1\ x\ y)$ und $(2\ x\ y)$ mit $x, y \in \{3, \dots, n\}$ und $x \neq y$ in B_n enthalten sind. (4)

(d) Zeigen Sie, dass die Elemente der Form $(x\ y\ z)$ mit $1 \leq x < y < z \leq n$ in B_n enthalten sind und schließen Sie, dass $A_n = B_n$. (8)

A2. (a) Sei G eine Gruppe. Auf G sei folgende Relation definiert: Für $a, b \in G$ gelte $a \sim b$, falls a und b konjugiert sind, d.h., falls es ein $c \in G$ gibt mit $a = c^{-1}bc$. (4)

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ nennt man die Konjugiertenklassen von G .

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Sind A und B konjugiert, wenn man sie als Elemente von $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ auffasst (also als Elemente der Gruppe der invertierbaren 2×2 -Matrizen, wobei die Gruppenoperation durch die Matrixmultiplikation gegeben ist)? (Hinweis: Diagonalisieren Sie die Matrizen zunächst.) (8)

(ii) A, B lassen sich auch als Elemente von $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ auffassen. Sind sie in dieser Gruppe konjugiert? (Hinweis: Wie lassen sich die Matrizen A, B geometrisch interpretieren? Welche Operation führt also A in B über?) (8)