UNIVERSITÄT ULM

Prof. Dr. S. Wewers
WS 2013/2014

Lösungen Elemente der Algebra: Blatt 2

A1. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Gruppe A_n erzeugt wird von den Dreizykeln der Form $(1\,2\,x)$ mit $x \in \{3, \dots, n\}$.

Sei hierzu B_n die Untegruppe von $\mathcal{S}_n$, die erzeugt wird von $\{(1\,2\,x) : x \in \{3, \dots, n\}\}$. Die Aufgabe ist also zu zeigen, dass $A_n = B_n$.

(a) Zeigen Sie, dass die Elemente der Form $(1\,x\,2)$ mit $x \in \{3, \dots, n\}$ in B_n enthalten sind. (4)

Lösung: B_n bildet eine Gruppe, also ist das Inverse zu $(1\,2\,x)$ enthalten.

(b) Zeigen Sie, dass die Elemente der Form $(1\,x)(2\,y)$ mit $x, y \in \{3, \dots, n\}$ und $x \neq y$ in B_n enhalten sind. (4)

Lösung: Dies ist gerade $(1\,2\,x) \circ (1\,2\,y)$.

(c) Zeigen Sie nun, dass die Element der Form $(1\,x\,y)$ und $(2\,x\,y)$ mit $x, y \in \{3, \dots, n\}$ und $x \neq y$ in B_n enhalten sind. (4)

Lösung: Man rechnet nach, dass die Permutation, die man benötigt, um aus $(1x)(2y)$ die Permutation $(1\,x\,y)$ zu erzeugen, gerade $(1\,y\,2)$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Elemente der Form $(x\,y\,z)$ mit $1 \leq x < y < z \leq n$ in B_n enthalten sind und schließen Sie, dass $A_n = B_n$. (8)

Lösung: Man rechnet wieder nach, dass die nötige Permutation von $(1\,x\,y)$ nach $(x\,y\,z)$ gerade $(1\,z\,x)$ ist. Die Aussage folgt dann aus dem Satz aus der Vorlesung.

A2. (a) Sei G eine Gruppe. Auf G sei folgende Relation definiert: Für $a, b \in G$ gelte $a \sim b$, falls a und b konjugiert sind, d.h., falls es ein $c \in G$ gibt mit $a = c^{-1}bc$. (4)

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ nennt man die Konjugiertenklassen von G.

Lösung: Dies rechnet man einfach nach.

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Sind A und B konjugiert, wenn man sie als Elemente von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ auffasst (also als Elemente der Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen, wobei die Gruppenoperation durch die Matrixmultiplikation gegeben ist)? (Hinweis: Diagonalisieren Sie die Matrizen zunächst.) (8)

Lösung: Die Matrizen A und B sind diagonalisierbar. Es ist $S^{-1}AS = \mathrm{diag}(-i, i)$ mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ und $T^{-1}BT = \mathrm{diag}(-i, i)$ mit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$. Also ist $A = ST^{-1}BTS^{-1}$.

(ii) A, B lassen sich auch als Elemente von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ auffassen. Sind sie in dieser Gruppe konjugiert? (Hinweis: Wie lassen sich die Matrizen A, B geometrisch interpretieren? Welche Operation führt also A in B über?) (8)

Lösung: Die Matrix $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (Spiegelung an der x-Achse) leistet das Gewünschte.