Universität Ulm

Prof. Dr. S. Wewers
WS 2013/2014

Lösungen Elemente der Algebra: Blatt 4

A1. In dieser Aufgabe betrachten wir die Gruppe $\mathbb{W}$, die Symmetriegruppe eines sechsseitigen Würfels. Diese Gruppe lässt sich als Untegruppe von S_6 auffassen: Man nummeriert die Seiten des Würfels von 1 bis 6, sodass die Summe gegenüberliegender Seiten 7 ergibt und, wenn die 1 oben liegt, 2 und 3 gegen den Uhrzeigersinn aufeinander folgen. (Hinweis: Zur Lösung der folgenden Aufgabe kann ein tatsächlicher Würfel sehr hilfreich sein. Hierzulande folgen die meisten Würfel dieser Aufteilung.)

(a) Beschreiben Sie für jede Achse durch gegenüberliegende Seiten eine Drehung um 90° als Element von S_6. (6)

Lösung: Achse 1–6: $\sigma_{16} = (2\ 3\ 5\ 4)$. Achse 2–5: $\sigma_{25} = (1\ 3\ 6\ 4)$. Achse 3–4: $\sigma_{34} = (1\ 2\ 6\ 5)$. (Oder jeweils das Inverse)

(b) Wie viele Konjugationsklassen solcher Drehungen gibt es in $\mathbb{W}$? (8)

Lösung: Die beiden Drehungen um 90° um eine Achse sind konjugiert, denn $\sigma_{16}^{-1} = \sigma_{25}^{-2}\sigma_{16}\sigma_{25}^{2}$, $\sigma_{25}^{-1} = \sigma_{16}^{-2}\sigma_{25}\sigma_{16}^{2}$, $\sigma_{34}^{-1} = \sigma_{16}^{-2}\sigma_{34}\sigma_{16}^{2}$ (wobei es egal ist welche andere Drehung man in der Konjugation verwendet).
Die Drehungen um verschiedene Achsen sind konjugiert, so ist $\sigma_{34} = \sigma_{25}\sigma_{16}\sigma_{25}^{-1}$ und $\sigma_{25} = \sigma_{34}\sigma_{16}\sigma_{34}$ (und Konjugation ist eine Äquivalenzrelation). Also gibt es nur eine Konjugationsklasse.

(c) Finden Sie zwei solche Drehungen deren Produkt Ordnung 3 hat. (6)

Lösung: $\sigma_{34} \cdot \sigma_{16} = (1\ 2\ 6\ 5) \cdot (2\ 3\ 5\ 4) = (1\ 2\ 3)(4\ 6\ 5)$ (dies entspricht einer Rotation um eine Diagonale).

A2. Welche der folgenden Gruppen sind isomorph? Welche sind es nicht? (20)

- $\mathbb{T}$
- D_6
- $\langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6), (1\ 2) \rangle \subseteq S_6$
- $\langle (1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6), (3\ 6)(2\ 5) \rangle \subseteq S_6$
- $\langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12) \rangle \subseteq S_{12}$

Lösung: Zunächst bestimmt man die Ordnung dieser Gruppen. In der Vorlesung hatte man gesehen, dass $|\mathbb{T}| = |D_6| = 12$. Offensichtlich ist $|\,\langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12) \rangle\,| = 12$. Es ist $\langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6), (1\ 2) \rangle = S_6$ also von Ordnung 720. Man zeigt außerdem (z.B. durch Aufschreiben aller Wörter), dass $|\,\langle (1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6), (3\ 6)(2\ 5) \rangle\,| = 12$.

Gruppen unterschiedlicher Ordnung sind nicht isomorph. Es bleibt also nur noch die Gruppen der Ordnung 12 zu untersuchen. Alternativ stellt man fest, dass $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(1\ 2) = (1\ 3\ 4\ 5\ 6)$ ein Element der Ordnung 5 ist. Die anderen Gruppen enthalten jedoch kein Element der Ordnung 5.

Die Gruppe $G := \langle (1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6), (3\ 6)(2\ 5) \rangle \subseteq S_6$ ist isomorph zu D_6: D_6 war definiert als die Untegruppe von O_2, die ein reguläres Sechseck fixiert. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass diese Gruppe erzeugt wird von der Rotation um 60° und der Spiegelung an der y-Achse. Nummeriert man die Ecken des Sechsecks etwas unkonventionell, sieht man diese Operationen gerade durch die zwei Permutationen gegeben sind.

Die Gruppe G ist nicht isomorph zu $\mathbb{T}$, denn $\mathbb{T}$ enthält kein Element der Ordnung 6.

Die letzte Gruppe ist abelsch, also nicht isomorph zu den anderen Gruppen, die alle nicht abelsch sind.