Elemente der Algebra: Blatt 8

A1. Sei G eine endliche Untergruppe von $O_3(\mathbb{R})$ die nicht in $SO_3(\mathbb{R})$ enthalten ist, und sei $H = G \cap SO_3(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass gilt $(G : H) = 2$. (5)

(b) Es gelte $-E_3 \notin G$. Zeigen Sie, dass dann die Abbildung (5)

$$\varphi : G \rightarrow SO_3(\mathbb{R}), g \mapsto \det(g) \cdot g$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

(c) Es gelte nun $-E_3 \in G$. Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus $G \rightarrow H \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gibt. (Hinweis: Benutzen Sie die Konstruktion aus der vorigen Teilaufgabe.) (5)

(d) Betrachten Sie nun die **vollen** Symmetriegruppen von Tetraeder, Würfel und Ikosaeder. Welche von diesen enthalten $-E_3$? Bestimmen Sie für die Gruppen, die $-E_3$ nicht enthalten, das Bild unter der Abbildung φ . (5)

A2. Sei G eine Gruppe. Eine Untergruppe H heißt von endlichem Index in G , falls die Mächtigkeit von G/H endlich ist. In diesem Fall nennt man diese Mächtigkeit $(G : H)$, den Index von H in G .

(a) Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe von endlichem Index in G und $K \subseteq H$ eine Untergruppe von endlichem Index in H . Zeigen Sie, dass gilt $(G : K) = (G : H) \cdot (H : K)$. (10)

(b) Seien $H \subseteq G$ und $K \subseteq G$ jeweils Untergruppen von endlichem Index in G . Zeigen Sie, dass dann auch $H \cap K$ von endlichem Index in G ist. (10)

A3. Zusatzaufgabe: In der Übung wurde die Menge $X = \{\{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, 2, 3\}\}$ und die Gruppe $G = D_7$ betrachtet.

(a) Um eine Wirkung von G auf X zu erklären, kann man eine Abbildung $G \times X \rightarrow X$ festlegen. In der Übung wurde die Festlegung $g \cdot f := (i \mapsto f(g(i)))$ getroffen. Wie lautet die zugehörigen Abbildung $G \rightarrow \text{Aut}(X)$? Zeigen Sie, dass dies **keine** Gruppenwirkung definiert. (+8)

(b) Korrigieren Sie den Fehler aus der Übung: Definieren Sie also eine Gruppenwirkung $G \rightarrow \text{Aut}(X)$ für welche die Berechnungen der Mächtigkeiten der Fixpunkt mengen richtig bleiben. (+8)